Math. P. 476

Mathesis. Systemata & methodi 132.

Erläuterungen

über

Herrn Karstens

mathematische Analysis

und

höhere Geometrie.

(Greifswald, 1786.)

Von

Rode,

Königl. Preußischer Lieutenant von der Armee.

Berlin, 1789.

Bey Heinrich August Rottmann,

Königl. Hofbuchhändler.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Vorbericht.

Herrn Karstens vortrefliche Absicht bey dem meisterhaften Entwurf seiner mathematischen Analysis und höhern Geometrie war unter andern auch diese, wie aus seiner Vorrede erhellet: dem eigenen Fleiße eines Anfängers den mündlichen Lehrer entbehrlich, und zugleich einen leichten Uebergang zu Herrn Leonhard Eulers claßischen Werken zu machen. Eben aus diesem Gesichtspunct war auch sein unermüdeter Eifer zu betrachten, womit er den übrigen Theilen seines wichtigen Lehrbegriffs nach und nach immer größere Vollkommenheit zu verschaffen suchte; und wohin unstreitig auch seine eigene vollständige Verzeichnisse von Druck- und Rechnungsfehlern gehören, die selbst nach seinem Urtheil sonst ein großer Anstoß für den Anfänger geblieben wären. Ob nun die gegenwärtigen Erläuterungen jener Absicht gemäß sind; ob

es mich nicht weniger Mühe gekostet haben würde, anstatt derselben lieber noch die von dem Herrn Verfasser erwähnten Abschnitte zur Ergänzung der Integralrechnùng, von der Integration solcher Functionen, die mehr als eine veränderliche Größe enthalten, und besonders der Differenzialgleichungen sowohl der ersten als auch höherer Ordnungen, aus Herrn Eulers großem Werke — nämlich wie gewöhnlich! — beyzufügen; dieß überlasse ich sowohl dem Urtheil einsichtsvoller Kenner, als dem stillen Ausspruch derjenigen Anfänger, die fürs erste Herrn Karstens Schriften gewählt haben, und denen auch mein armseliger Index hier immer so lieb als in Erxlebens Naturlehre seyn könnte.

Berlin, im Januar 1789.

Rode.

Zu §. 7. 2. Zusatz.

Die dritte Auflösung im 453. §. der Geometrie, woraus der Herr Verfasser den gegenwärtigen Ausdruck für tang φ herleitet, ist dort ohne Nutzen so weit hergeholt. Man setze in der dortigen 181. Figur, die gegebenen Seiten $AB = c$, $AC = b$, und den gegebenen Winkel $A = \alpha$, den gesuchten $ABC = \beta$, und $ACB = \gamma$; ferner sey BD auf AC senkrecht, und der Halbmesser der Tafeln $= r$: so ist $BD = \frac{c . \sin \alpha}{r}$, $AD = \frac{c . \cos \alpha}{r}$, und $DC = b - \frac{c . \cos \alpha}{r}$, also $\tan \gamma = \frac{BD . r}{DC} = \frac{c . \sin \alpha}{b - c . \cos \alpha : r}$. Für $r = 1$, ist $\tan \gamma = \frac{c . \sin \alpha}{b - c . \cos \alpha}$. Wegen α ist zwar nun auch β bekannt; indeß folgt aus dem Ausdrucke für tang γ auch unmittelbar nach einer

leichten Versetzung der gehörigen Buchstaben, $\tan \beta = \frac{b.\sin \alpha}{c - b.\cos \alpha}$.

Allein selbst die angeführte Stelle der Geometrie *ist* für den gegenwärtigen Zusatz ganz überflüßig; denn nach dem 6. §. 1. Zus. ist $\tan \phi = \frac{y}{x}$, hier aber $y = z \sin \phi = u \sin \psi$, und $x = z \cos \phi = a - u \cos \psi$, also $\tan \phi = \frac{u \sin \psi}{a - u \cos \psi}$.

Zu §. 9.

Aus der Gleichung $y^2 = b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2}$ findet man nach dem 7. §. eine andere merkwürdige Gleichung für Ordinaten die im Mittelpunct C zusammenlauffen. Wenn man nämlich $PCM = \phi$ und $CM = z$ setzt, so ist $z^2 \sin \phi^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} . z^2 \cos \phi^2$, folglich $z^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin \phi^2 + b^2 \cos \phi^2}$. Auf dieser Gleichung beruhet z. B. die wegen der sphäroidischen Gestalt der Erde nöthige Verbesserung einer gefundenen Polhöhe, ferner Hauptuntersuchungen bey der Parallaxe des Mondes u. s. w.

Zu §. 12.

Dieser und der folgende 13. §. sammt ihren Zusätzen beruhen gänzlich auf der Voraussetzung, daß die Summe der Entfernungen $MF + MR =$ dem

dem halben Parameter sey. Daher muß man (15. Seite, 8. Zeile) anstatt von beständiger Größe bleibt, eigentlich von beständiger Größe $= \frac{1}{2}.HI$ bleibt, lesen.

Zu §. 15. 4. Zusatz.

Die Tangente des halben Asymtotenwinkels, oder tang ACK ist $= \frac{AK}{CA} = \frac{b}{a}$. Für $b = a$, das heißt für die gleichseitige Hyperbel (14. §. 4. Zus.), ist also der Asymtotenwinkel $= 90°$.

Zu §. 18.

Demnach wird eine allgemeine Gleichung der vierten Ordnung, außer der beständigen Größe a, zwey Producte der ersten Ordnung, drey Producte von der zweyten, viere von der dritten, und fünf Producte von der vierten Ordnung haben; zusammen also $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ Glieder. Ueberhaupt also hat die allgemeine Gleichung von der n Ordnung, $1 + 2 + 3 + \ldots (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Glieder.

Zu §. 21.

Zu den drey Fällen der Aenderung der Lage der Axe und des Coordinatenwinkels im 19, 20 und 21. §., gehört noch der folgende vierte eben so merkwürdige Fall, wenn man nämlich aus einer Gleichung zwischen rechtwinklichen Coor-

dinaten, eine andere für schiefwinkliche Coordinaten herleiten soll, wobey aber zugleich eine neue Abscissenaxe die vorige unter dem Winkel α im Anfangspunct der Abscissen schneidet. Hier sey die gegebene Gleichung eine zwischen x und y (§. 20.), der neue Coordinatenwinkel $= \beta$, und die gesuchte Gleichung eine zwischen t und u (21. §.); man setze AP (fig. 10.) $= r = AQ$ (fig. 9.), und PM (fig. 10.) $= s = QM$ (fig 9.), so erhält man nach dem 21. §. diese beyden Gleichungen $s = u \sin \beta$, und $r = t - u \cos \beta$. Diese Werthe von s und von r in die Gleichungen des 20. §. gesetzt, geben $x = (t - u \cos \beta) \cos \alpha + u \sin \beta \sin \alpha = t \cos \alpha - u \cos (\alpha + \beta)$, und $y = u \sin \beta \cos \alpha - (t - u \cos \beta) \sin \alpha = u . \sin (\alpha + \beta) - t \sin \alpha$. Weil aber y durch x gegeben war, so kann man aus der zweyten Gleichung den Werth von x suchen, und ihn dem Werthe in der ersten Gleichung gleich setzen; das giebt die gesuchte Gleichung zwischen t und u, für schiefwinkliche Coordinaten und für eine neue Axe AE (fig 9.). Da übrigens die gegebene Gleichung zwischen x und y offenbar eben so gut selbst aus einer Gleichung zwischen jeden schiefwinklichen Coordinaten, nach der Conuersa des 21. §., entstanden seyn könnte, ohne das gewiesene Verfahren im geringsten zu ändern: so gilt die gegenwärtige Auflösung auch für einen fünften Fall, wenn nämlich aus einer gegebenen Gleichung zwischen schiefwinklichen Coordinaten, eine andere auch für schiefwinkliche Coordinaten gesucht wird, wobey aber nicht nur der neue schiefe Coordinatenwinkel von

dem

dem ersten unterschieden seyn, sondern auch eine neue Abscissenlinie die vorige unter einem gegebenen Winkel im Anfangspunct der Abscissen schneiden soll.

Zu §. 22.

„Man kann die Linien, deren Natur „durch eine Gleichung zwischen zwey verän„derlichen Größen ausgedruckt wird, eben so „in Linien, die zu verschiedenen Ordnungen „gehören, eintheilen, wie die Gleichungen „(§ 18.), u. s. w."

Hievon sind aber erstlich die Gleichungen zwischen einem veränderlichen Winkel und zusammenlauffenden Ordinaten (6. §.) auszunehmen, die beynahe allemal von einer niedrigern Ordnung sind, als die Gleichungen zwischen andern Coordinaten; denn jene Gleichungen können von der ersten Ordnung seyn, und dennoch für eine Ellipse (8. §. 5. Zus.), Parabel (10. §. 3. Zus.), Hyperbel (14. §. 5. Zus.), Cissoide (157. §.), Conchoide (159. §.), Quadratrix des Dinostrates (180. §. 1. Zus.), u. s. w. gehören. Daher gilt auch der Zusatz des 19, 20 und 21. §. gar nicht bey dem 7. §. und bey dem 1. Zusatz des 6. §. Eben so muß man hievon auch die Gleichungen für krummlinigte Abscissen (53. §. 4. Zus.) ausnehmen; denn eine solche kann von der ersten Ordnung, auch der Gleichung für die grade Linie (5. §. 1. Zus.) ganz ähnlich seyn, und doch für die archimedische Spirallinie (185. §.) gehören. Eben so falsch wäre es, daß jede Gleichung der zweyten Ordnung

für eine Linie der zweyten Ordnung gehört; denn so müßte jede Gleichung der zweyten Ordnung für einen Kegelschnitt gehören (155. §.); wenn aber z. B. in der Gleichung $yy = \frac{rr}{p} . w$, w einen Kreisbogen bedeutet, so gehört diese Gleichung für die parabolische Spirallinie (185. §.), offenbar also für keinen Kegelschnitt. Ueberhaupt ist es nicht wahr, daß jede Gleichung der Ordnung n, auch für eine Linie der Ordnung n gehöre; denn so müßte schon jede Gleichung der ersten Ordnung für eine Linie der ersten Ordnung, also nach dem 1. Zusatz des 24. §, für eine grade Linie gehören, welches offenbar falsch ist. Nur dieß bleibt allgemein wahr, daß jede Linie der Ordnung n, auch eine Gleichung von der n Ordnung hat. Aus dem bisherigen ist also ganz klar, daß man sich bey der Eintheilung der Linien nach Ordnungen, nur an ihre Gleichungen zwischen den gewöhnlichen Coordinaten (5. §.) halten müsse.

Zu §. 43 und 44.

Die Lehre von den größten und kleinsten Werthen wird der Leser in keinem deutschen Lehrbuche faßlicher und gründlicher vorgetragen, und mit so viel wohlgewählten Beyspielen erläutert finden, als in des Herrn Oberstlieutenant von Tempelhoff Analysis des Unendlichen; alsdann kann er zu Hrn. Eulers Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum, Nov. Commentar. Petropol. Tom. X. 1766, übergehn.

Zu §. 53. 1. Zusatz.

„Der allgemeine Ausdruck für die Sub-„tangente bleibt z tang $\psi = \frac{zzdr}{dz} = Ct$, und für „die Subnormallinie $Cn = z \cot \psi = \frac{dz}{dr}$.“

Fürs erste ist $Ct = CM$. tang CMt; weil aber $CM = z$, und $CMt = 180° - CMT = 180° - \psi$, so ist offenbar $Ct = -z$ tang $\psi = \frac{-zzdr}{dz}$. Ferner ist $Cn = CM$. tang CMn, und $CMn = CMT - nMT = \psi - 90°$, folglich $Cn = z$ tang $(\psi - 90°) = -z \cot \psi$; es ist aber tang $\psi = \frac{zdr}{dz}$, und $\cot \psi = \frac{dz}{zdr}$, also $Cn = -\frac{dz}{dr}$. Hiernach sind die beyden Ausdrücke im Buche zu verbessern, die den Herrn Verfasser im 4. Zusatz des 184. §. zu der Bemerkung: „da „dann das Zeichen — nur die Lage anzeigt,“ verführt haben.

Zu §. 53. 4. Zusatz.

Für diese Gleichung zwischen x und y, ist nach dem 52. §. die Lage der Tangente oder tang $CMT = -\frac{r-y}{r} \cdot \frac{dx}{dy}$, und das Differenzial des Bogens oder $ds = dy \sqrt{\left(1 + \frac{(r-y)^2}{rr} \cdot \frac{dx^2}{dy^2}\right)}$.

Zu §. 60.

Hiebey ist fürs erste merkwürdig, daß wenn z eine Function von zwey veränderlichen Größen x und y ist, allemal auch ${}^y d^x dz = {}^x d^y dz$ sey. Denn aus dem Beweise im Buche selbst erhellet, daß einerley herauskommt, man mag in der Function z, zuerst $y + dy$ anstatt y, und alsdann in diesem Resultate überall $x + dx$ anstatt x, oder aber zuerst $x + dx$ anstatt x, und alsdann in diesem Resultate überall $y + dy$ anstatt y setzen. Eben hierauf beruht die Wahrheit der beyden ersten Zeilen auf der 108. Seite, und der beyden letzten Zeilen auf der 196. Seite, wo der Herr Verfasser sagt: „$dz = {}^x dz + {}^y dz + {}^x d^y dz$, oder „welches einerley ist $dz = {}^y dz + {}^x dz + {}^y d^x dz$."

Alsdann aber ist auch in Absicht des Lehrsatzes selbst wohl zu merken, daß dessen Wahrheit nicht bloß auf eine Function zweyer veränderlicher Größen einzuschränken sey. Denn es bleibt auch in der größten Allgemeinheit wahr, daß wenn eine Function Z, n veränderliche Größen enthält, ihr Differenzial aus n Theilen bestehe, welche gefunden werden, wenn man die Function Z zu n verschiedenen Malen so differenzirt, daß man nach der Ordnung jedesmal nur eine der veränderlichen Größen als wirklich veränderlich, die übrigen $n - 1$ Größen als beständige ansieht. Es sey nämlich Z eine Function der drey veränderlichen Größen x, y und ζ; setzt man nun $x + y = \varphi$, so ist nach dem 60. §., $dZ = {}^\varphi dZ + {}^\zeta dZ$; allein eben nach dem

dem 60. §. ist ja ${}^{\varphi}dZ$ nichts anders als ${}^{x}dZ + {}^{y}dZ$, weil ζ in ${}^{\varphi}dZ$ als eine beständige Größe anzusehen ist; folglich ist $dZ = {}^{x}dZ + {}^{y}dZ + {}^{\zeta}dZ$. Durch diese Methode wird zugleich erwiesen, daß wenn der Lehrsatz im 60. §. für eine Function von n veränderlichen Größen wahr ist, er auch für eine Function von $n + 1$ veränderlichen Größen gelte: nun gilt er aber für eine Function von zwey (60. §), auch von drey veränderlichen Größen, also gilt er auch wenn $n = 4$, $n = 5$, u. s. w. ist. Z. B. sey $Z = xy\zeta$, so ist nach dem Lehrsatze ${}^{x}dZ = y\zeta dx$, ${}^{y}dZ = x\zeta dy$, ${}^{\zeta}dZ = xyd\zeta$, folglich $dZ = {}^{x}dZ + {}^{y}dZ + {}^{\zeta}dZ = y\zeta dx + x\zeta dy + xyd\zeta$, vollkommen also wie man schon in dem Zusatze des 34. §., $d.(xy\zeta)$ gefunden hat.

Endlich muß man aber auch nicht vergessen, daß das nach dem obigen allgemeinen Lehrsatze gefundene Differenzial immer noch unvollständig bleibt. Wenn nämlich z eine Function der zwey veränderlichen Größen x und y ist, so ist das vollständige Differenzial dz eigentlich doch $= {}^{x}dz + {}^{y}dz + {}^{y}d^{x}dz$. Oder wenn Z eine Function der drey veränderlichen Größen x, y und ζ ist, so ist das vollständige Differenzial dZ eigentlich $= {}^{\zeta}dZ + {}^{y}dZ + {}^{\zeta}d^{y}dZ + {}^{x}dZ + {}^{\zeta}d^{x}dZ + {}^{y}d^{x}dZ + {}^{\zeta}d^{y}d^{x}dZ$, dessen Theile man findet, wenn man in der Function Z zuerst $x + dx$ anstatt x, dann $y + dy$ anstatt y, und endlich $\zeta + d\zeta$ anstatt ζ setzet. Wie man das Differenzial einer Function z von zwey veränderlichen Größen, durch eine unbestimmt fort-

fortlaufende Reihe vollständig ausdrucken soll, lehret der 113. §.

Zu §. 63.

Wenn man die Logarithmen der trigonometrischen Linien nach dem 56. §. differenzirt, so folgt unmittelbar aus dem 63. §.

$$\int d\varphi \cot \varphi = \log \sin \varphi + C.$$

$$\int -d\varphi \,\mathrm{tang}\, \varphi = \log \cos \varphi + C.$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin \varphi \cos \varphi} = \log \mathrm{tang}\, \varphi + C.$$

$$\int \frac{-d\varphi}{\sin \varphi \cos \varphi} = \log \cot \varphi + C.$$

$$\int d\varphi \,\mathrm{tang}\, \varphi = \log \sec \varphi + C.$$

$$\int -d\varphi \cot \varphi = \log \mathrm{cosec}\, \varphi + C.$$

$$\int \frac{d\varphi \sin \varphi}{\sin \mathrm{vers}\, \varphi} = \int \frac{d\varphi \sin \varphi}{1 - \cos \varphi} = l(1 - \cos \varphi) + C.$$

$$\int \frac{d\varphi \cos \varphi}{\mathrm{cosinvers}\, \varphi} = \int \frac{d\varphi \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} = l(1 - \sin \varphi) + C.$$

Zu §. 65.

Im Lehrsatze selbst heißt es: „wenn $\frac{m+1}{n}$ $+ p$ eine ganze Zahl ist.“ Diese positive oder negative ganze Zahl kann auch $= 0$ seyn.

Zu §. 66. 2. Zusatz.

Diese vortrefliche Methode, die uns für die trigonometrischen Linien die Umkehrung der Reihen

hen erspart, also eben dadurch nicht nur die Rechnung ungemein erleichtert, sondern auch das Gesetz der Coefficienten für die gesuchte Reihe besser übersehen läßt, verdient noch durch ein Beyspiel für den cos ψ mehr erläutert zu werden; zumal da die wichtigen Formeln im 278. §. auf den gegenwärtigen Reihen für sin ψ und cos ψ gänzlich beruhen. Man setze also $y = \cos\phi$, und $\phi + \psi$ anstatt ϕ, folglich auch $y + \Delta y = y'$ anstatt y: so ist $y' = \cos(\phi + \psi)$. Hier bediene man sich der Reihe im 40. §. 1. Zusatz, so daß man ϕ anstatt x, und ψ anstatt b setzt: so wird y' oder cos

$$(\phi+\psi)=\cos\phi+\frac{dy}{d\phi}.\psi+\frac{ddy}{2d\phi^2}.\psi^2+\frac{d^3y}{2.3.d\phi^3}.\psi^3$$

$$+\frac{d^4y}{2.3.4.d\phi^4}.\psi^4+\frac{d^5y}{2.3.4.5.d\phi^5}.\psi^5+\ldots\ldots$$

Wenn man aber $y = \cos\phi$ differenzirt, so findet man $\frac{dy}{d\phi} = -\sin\phi$, und die höhern Differenzialien (90. Seite) $\frac{ddy}{d\phi^2} = -\cos\phi$, $\frac{d^3y}{d\phi^3} = +\sin\phi$, $\frac{d^4y}{d\phi^4} = +\cos\phi$, $\frac{d^5y}{d\phi^5} = -\sin\phi$, $\frac{d^6y}{d\phi^6} = -\cos\phi$, $\frac{d^7y}{d\phi^7} = +\sin\phi$ u. s. w. Substituirt man diese Werthe in der Reihe für $\cos(\phi + \psi)$, so erhält man $\cos(\phi+\psi) = \cos\phi - \psi.\sin\phi - \frac{1}{2}\psi^2$ $\cos\phi + \frac{1}{2.3}\psi^3.\sin\phi + \frac{1}{2.3.4}.\psi^4\cos\phi -$ $\frac{1}{2.3.4.5}.\psi^5.\sin\phi - \frac{1}{2.3\ldots6}.\psi^6.\cos\phi +$ $\frac{1}{2.3\ldots7}.\psi^7.\sin\phi + \frac{1}{2.3\ldots8}.\psi^8.\cos\phi + \ldots\ldots$

Setzt

Setzt man hierin $\varphi = 0$, folglich $\sin\varphi = 0$, und $\cos\varphi = 1$, so wird $\cos\psi = 1 - \frac{1}{2}\psi^2 + \frac{1}{2.3.4}\psi^4 - \frac{1}{2.3.4.5.6}.\psi^6 + \frac{1}{2.3\ldots8}.\psi^8 - \frac{1}{2.3\ldots.10}.\psi^{10} + \frac{1}{2.3\ldots12}.\psi^{12} - \ldots\ldots$

Zu §. 69.

Die folgende Auflösung ist wegen ihrer Kürze leichter zu übersehn, und drückt überdieß das Differenzial des Sectors vollständig aus. Mit *CM* nämlich beschreibe man aus *C* den Kreisbogen *Mq*, so daß *q* in der verlängerten *Cm* liegt. Es sey $BCM = y$, $MCm = dy$, so ist $Mq = z dy$, $qm = dz$, der Sector $MCq = \frac{1}{2}z^2 dy$, und das bey *q* rechtwinkliche $\triangle Mmq = Mq.\frac{1}{2}qm = \frac{1}{2}z\,dz\,dy$. Das Differenzial der Fläche *BCM* wäre nun eigentlich = der Fläche MCm = Sector $MCq - \triangle Mmq = \frac{1}{2}z^2 dy - \frac{1}{2}z dz dy = \frac{1}{2}z dy.(z - dz)$; da aber dy sowohl als dz verschwindend klein angenommen werden, so bleibt das erwähnte Differenzial $= \frac{1}{2}z^2 dy$.

Anmerk. Für die Gleichung im 53. §. 4. Zusatz (fig. 11.), läßt sich das Differenzial derjenigen Fläche, welche zwischen dem Kreisbogen $BD = x$ und der krummen Linie $BM = s$ enthalten ist, auf diese Art finden: man verlängere *Cm* bis davon der Kreisbogen *BD* irgendwo in *q* geschnitten wird; so ist $Dq = dx$, $Mm = ds$, $DM = y$, $CM = z = r - y$, und das gesuchte Differenzial *DMmq* ist = dem Kreisausschnitte *DCq* — Ausschnitt

schnitt $MCm = \frac{1}{2}rdx - \frac{1}{2}z^2dy$ (69. §.), $= \frac{1}{2}rdx - \frac{1}{2}\frac{(r-y)^2}{r}dx = \frac{2ry - yy}{2r}dx$.

Zu §. 74.

In dem Beweise führt der Herr Verfasser wirklich höchst überflüßig die neuen Größen r und s ein; daher auch die Dunkelheit! der Lehrsatz ist zu wichtig, als daß man ihn dem Anfänger nicht in das gehörige Licht setzen sollte. Wenn nämlich $dz = pdx + qdy$, und z eine Function von x und y ist, p und q mögen allenfalls auch jedes eine Function der zwey veränderlichen Größen x und y seyn: so kann man allemal pdx so betrachten, als ob es aus einer Differenzirung von z entstanden wäre, wobey man nur x veränderlich angenommen hätte; und qdy kann man ansehn, als ob es durch eine Differenzirung von z entstanden wäre, wobey nur y veränderlich war; das heißt, man kann $pdx = {}^x dz$, und $qdy = {}^y dz$ setzen. Dieß ist schon aus dem 60. §. klar, wo ich auch gewiesen habe, daß ${}^x d {}^y dz = {}^y d {}^x dz$ seyn muß. Aus $pdx = {}^x dz$ folgt ${}^y dp \,.\, dx = {}^y d {}^x dz$; und aus $qdy = {}^y dz$ folgt ${}^x dq \,.\, dy = {}^x d {}^y dz$: weil aber ${}^x d {}^y dz = {}^y d {}^x dz$ ist, so ist auch ${}^y dp \,.\, dx = {}^x dq \,.\, dy$, oder $\frac{{}^y dp}{dy} = \frac{{}^x dq}{dx}$.

Zu §. 74. Zusatz.

„So kann man, um sie zu integriren, „die Regel des 73. §. 2. Zusatzes nicht anwen„den, wofern nicht $\frac{{}^y dp}{dy} = \frac{{}^x dq}{dx}$ befunden wird.“

I. Eigentlich wofern nicht in der Gleichung ${}^{x}\!\int pdx + {}^{y}\!\int (qdy - {}^{y}d\,{}^{x}\!\int pdx) \mp \text{Const} = 0$, des 73. §. 2. Zusatzes, auch $qdy - {}^{y}d\,{}^{x}\!\int pdx = 0$ befunden wird. Daß aber aus der Bedingung $\frac{{}^{y}dp}{dy} = \frac{{}^{x}dq}{dx}$, auch unmittelbar $qdy - {}^{y}d\,{}^{x}\!\int pdx = 0$ folge, erhellet auf diese Art: aus $\frac{{}^{y}dp}{dy} = \frac{{}^{x}dq}{dx}$, oder aus ${}^{y}dp \,.\, dx = {}^{x}dq \,.\, dy$ folgt ${}^{x}\!\int {}^{y}dpdx = {}^{x}\!\int {}^{x}dqdy = qdy$. Wofern man also nur beweisen kann, daß ${}^{x}\!\int {}^{y}dpdx = {}^{y}d\,{}^{x}\!\int pdx$ sey, so ist offenbar dadurch der Satz $qdy = {}^{y}d\,{}^{x}\!\int pdx$ dargethan. Man setze also kürzehalber ${}^{x}\!\int pdx = \lambda$, so ist $pdx = {}^{x}d\lambda$, und ${}^{y}dpdx = {}^{y}d\,{}^{x}d\lambda = {}^{x}d\,{}^{y}d\lambda$ (man s. die Anmerk. zu §. 60.), folglich ${}^{x}\!\int {}^{y}dpdx = {}^{x}\!\int {}^{x}d\,{}^{y}d\lambda = {}^{y}d\lambda$; aus der Gleichung ${}^{x}\!\int pdx = \lambda$ folgt aber auch ${}^{y}d\,{}^{x}\!\int pdx = {}^{y}d\lambda$, also ist ${}^{x}\!\int {}^{y}dpdx = {}^{y}d\,{}^{x}\!\int pdx$.

II. Die erwähnte Bedingung im Buche kann auch so ausgedruckt werden: wofern nicht ${}^{y}\!\int qdy = {}^{x}\!\int pdx$ befunden wird. Denn aus $\frac{{}^{y}dp}{dy} = \frac{{}^{x}dq}{dx}$ folgt ${}^{y}d\,{}^{x}\!\int pdx = qdy$ (I.), mithin ${}^{y}\!\int {}^{y}d\,{}^{x}\!\int pdx = {}^{y}\!\int qdy$, oder ${}^{x}\!\int pdx = {}^{y}\!\int qdy$.

III. Von den beyden Differenzialgleichungen $nxdy + ydx = 0$, und $nxdy - ydx = 0$, als Beyspielen, sagt der Herr Verfasser, daß man sie nicht integriren könne, ohne vorher die erste mit y^{n-1}, und die zweyte mit $\frac{y^{n-1}}{xx}$ zu multipliciren. Dieß ist aber bloß beziehungsweise auf die Regel im 73. §. 2. Zusatz, und nicht in der Allgemeinheit zu verstehen, als ob man diese Glei-

chungen

chungen sonst durchaus auf keine andere Art integriren könnte; denn die Absonderung der Größen in beyden Gleichungen, worauf alles ankommt, ist auch ohne die Factoren des Herrn Verfassers ungemein leicht vollzogen. Nämlich die erste Gleichung $nxdy = -ydx$, giebt unmittelbar $\frac{ndy}{y} = -\frac{dx}{x}$, oder (62. §. 4. und 5. Zus.) $\log y^n = \log \frac{1}{x} + \text{Const}$, also $y^n x = \text{Const}$. Aus der zweyten Gleichung $nxdy = ydx$, folgt eben so $\frac{ndy}{y} = \frac{dx}{x}$, mithin $\log y^n = \log x + \text{Const}$, oder $\frac{y^n}{x} = \text{Const}$.

Zu §. 76.

Alle diese Integrale, das dritte ausgenommen, stehen zwar schon auf der 86. Seite No. 4; sie sind aber dort nur indirecte gefunden. Das fünfte Integral mit dem positiven Zeichen im Nenner, nämlich $\int \frac{dx}{x\sqrt{(1 + xx)}}$ kommt unten im 83. §. 3. Zusatz vor.

Zu §. 79. 3. Zusatz.

„Man setze $x + \frac{1}{2}f = z$.“

Die Absicht dieser Substitution ist bekanntlich bloß das zweyte Glied fx des Nenners wegzuschaffen. Die allgemeine Auflösung der Aufgabe aus einer höhern Gleichung, also aus

jeder rationalen ganzen Function das zweyte Glied wegzuschaffen, giebt der 238. §. Um übrigens auch alle Zweydeutigkeit in dem Ausdrucke $\frac{A}{c} \cdot A \text{ tang } \frac{1}{c}$ zu vermeiden, hätte der Herr Verfasser $a - \frac{1}{2}bf$ lieber $= B$, als $= A$ setzen sollen.

Wäre $g = 0$, so wäre $c = \frac{1}{2}f \cdot \sqrt{-1}$, und des Integrals $\int \frac{(a + bx)\, dx}{xx + fx}$, erster Theil $\frac{A}{c} \cdot Arc \text{ tang } \frac{1}{c} = \frac{a - \frac{1}{2}bf}{\frac{1}{2}f \cdot \sqrt{-1}} \cdot Arc \text{ tang } \frac{x + \frac{1}{2}f}{\frac{1}{2}f \cdot \sqrt{-1}}$, welche scheinbare Unmöglichkeit eines Kreisbogens immer ein Merkmal ist, daß die Integration dieses Theils auf Logarithmen ankommt. Die Sicherheit dieses Merkmals überhaupt erhellet aus dem Satze $\phi = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot \log \frac{1 + \text{tang } \phi \sqrt{-1}}{1 - \text{tang } \phi \sqrt{-1}}$ $= \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \log (\cos \phi + \sin \phi \sqrt{-1})$ im 249. §; und weil die Quadratur der hyperbolischen Ausschnitte immer von Logarithmen abhängt (143. §. 8. Zusatz), so pflegt man auch bloß in diesem Verstande zu sagen, unmögliche Kreisausschnitte wären mögliche hyperbolische Ausschnitte. Daß aber auch die Unmöglichkeit des Kreisbogens wirklich nur scheinbar sey, erhellet aus dem Zusatze des 249. §. und des 250. §. Das Integral für den gegenwärtigen Fall wird nun so gefunden: es ist $\frac{(a + bx)\, dx}{xx + fx} = \frac{adx}{fx + xx} + \frac{bdx}{f + x}$; hievon der erste Theil $\frac{adx}{fx + xx}$, nach Anleitung des 79. §., =

$= \frac{a}{f} \cdot \frac{dx}{x} - \frac{a}{f} \cdot \frac{dx}{f+x}$; also $\int \frac{(a+bx)\,dx}{fx+xx} = \frac{a}{f} \cdot \log x - \frac{a}{f} \cdot \log(f+x) + b \cdot \log(f+x) + \text{Const} = \frac{a}{f} \cdot \log x + \left(b - \frac{a}{f}\right) \cdot \log(f+x) + \text{Const}.$

Zu §. 82. 3. Zusatz.

Die ganze Anwendung des ersten und zweyten Zusatzes ist hier auf das Differenzial $dy = \frac{-2a^2du}{(1+uu)^3}$ unrichtig gemacht. Wenn nämlich im ersten Zusatze (125. Seite, 4. Zeile von unten) $\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{bb.c} \cdot Arc\ \text{tang}\ \frac{z}{c} + C$ ist: so folgt daraus gar nicht, daß auch $\int \frac{-dx}{X} = -\int \frac{dx}{X} = \frac{-1}{bb.c} \cdot Arc\ \text{tang}\ \frac{z}{c} + \text{Const}$ sey; sondern es ist $\int \frac{-dx}{X} = \frac{1}{bb.c} \cdot Arc.\ \text{cotang}\ \frac{z}{c} + \text{Const}$, welches aus dem 63. §. gleich in die Augen fällt. Daher muß (126. Seite, 1. Zeile) $\int \frac{-dx}{X} = \frac{1}{ab \sin z} \cdot Arc\ \text{cotang}\ \frac{bx - a \cos z}{a \sin z} + \text{Const} = \frac{1}{ab \sin z} \cdot Arc.\ \text{tang}\ \frac{a \sin z}{bx - a \cos z} + \text{Const}$; folglich (126. Seite, letzte Zeile) $\int \frac{-dx}{X} = -\frac{bx - a \cos z}{2a^2 b . \sin z^2 . X} + \frac{1}{2a^2 \sin z^2} \cdot \int \frac{-dx}{X} + \text{Const} = \frac{a \cos z - bx}{2a^2 b \sin z^2 . X} + \frac{1}{2a^3 b \sin z^3} \cdot Arc.\ \text{tang}\ \frac{a \sin z}{bx - a \cos z}$

$\frac{a \sin \zeta}{bx - a \cos \zeta}$ + Const; und endlich (127. Seite, 1. Zeile) $\int \frac{-dx}{X^3} = \frac{a \cos \zeta - bx}{4a^2 b \sin \zeta^2 . X^2} + \frac{3}{4a^2 \sin \zeta^2} .$ $\int \frac{-dx}{X^2}$ + Const $= \frac{a \cos \zeta - bx}{4a^2 b \sin \zeta^2 . X^2} + \frac{3(a \cos \zeta - bx)}{8a^4 b \sin \zeta^4 X}$ $+ \frac{3}{8a^5 b . \sin \zeta^5} . A \tang \frac{a \sin \zeta}{bx - a \cos \zeta}$ + Const, seyn. Demnach muß man nicht, wie im Buche, $y = -2a^2 \int \frac{du}{(1+uu)^3}$, sondern $y = 2a^2 \int \frac{-du}{(1+uu)^3}$ setzen. Für $a = 1$, $b = 1$, $\cos \zeta = 0$, $\sin \zeta = 1$, und $1 + uu = V = X$, ist alsdann

$\int \frac{-du}{V} = Arc. \tang \frac{1}{u}$ + Const (63. §.),

$\int \frac{-du}{V^2} = \frac{-u}{2(1+uu)} + \frac{1}{2} Arc. \tang \frac{1}{u}$ + Const, und

$\int \frac{-du}{V^3} = \frac{-u}{4(1+uu)^2} - \frac{3u}{8(1+uu)} + \frac{3}{8} Arc. \tang \frac{1}{u}$ + Const. Weil nun der Bezeichnung im 65. §. 2. Zusatz gemäß, $uu = \zeta = \frac{a-x}{x}$, mithin $1 + uu = \frac{a}{x}$ ist, so ist $2a^2 . \int \frac{-du}{(1+uu)^3} = -\frac{1}{2} x . V(ax - xx) - \frac{3}{4} a V(ax - xx) + \frac{3}{4} aa . Arc. \tang V \frac{x}{a-x}$ + Const $= -\frac{1}{2}(x + \frac{3}{2} a) . V(ax - xx) + \frac{3}{4} aa . Arc. \tang V \frac{x}{a-x}$ + Const; aber nicht wie im Buche, $= -\frac{1}{2} x V(ax - xx) - \frac{3}{4} a V(ax - xx) - \frac{3}{4} aa . Arc. \tang V \frac{a-x}{x}$

+

+ Const. Daher ist auch des Herrn Verfassers Constans = + $\frac{3}{8}aa\pi$ offenbar falsch; denn für $x = 0$, ist auch Constans = 0. Ungeachtet dessen aber giebt doch des Herrn Verfassers Integral, bey der Quadratur der Cissoide im 157. §. 5. Zusatz, zufällig etwas wahres. Wenn man nämlich $x = a = 2r$ setzet, so geben beyde gegenwärtige Integrale einerley Resultat $= \frac{3}{8}\pi aa = \frac{3}{2}\pi rr$. Uebrigens wird einem auch nur mäßig geübten Verstande das Zufällige solcher Wahrheiten bey gewissen falschen Sätzen nicht im geringsten auffallen.

Zu §. 83.

„Das Integral von $\frac{2dz}{g - bzz}$ wird nach „schon bekannten Regeln leicht gefunden, und „man hat alsdenn $z = \sqrt{\frac{f + gx}{a + bx}}$."

I. Nach dem 77. §, (115. Seite, 5. Zeile) ist das $\int \frac{2dz}{g - bzz} = \frac{1}{\sqrt{gb}} \cdot \log \frac{1 + z\sqrt{(b:g)}}{1 - z\sqrt{(b:g)}} +$ Const. Allein weder das rationale Differenzial, noch das gefundene Integral können im Ernst als sehr leicht anwendbare Formeln empfohlen werden. Denn aus dem Werthe von $z = \sqrt{\frac{f + gx}{a + bx}}$ sieht man zwar soviel, daß die zwey möglichen einfachen Factoren der Function $\alpha + \beta x + \gamma xx$, Zähler und Nenner eines Bruches sind, woraus die Quadratwurzel zu ziehen ist; aber das sieht man nicht deutlich, ohne jedesmal die Rechnung ganz

von vorne anzufangen, welcher von den beyden Factoren eben den Zähler, und welcher von ihnen den Nenner des Bruchs abgeben soll; zumal da man die hiezu nöthigen Vergleichungen zwischen den drey Coefficienten α, β, γ, und den vier a, b, f, g, nicht anstellen kann, weil man nur diese drey Gleichungen $af = \alpha$, $bf + ag = \beta$, und $bg = \gamma$ hat. Wenn also der Herr Verfasser bey dem Exempel im 1. Zusatze (130. Seite, 2. Zeile) sagt: „also kann man $a = b = f = 1$, „und $g = -1$ setzen;“ so ist dieses ein Beweis für diese Anmerkung.

II. Das folgende Verfahren wird nicht nur diesen Mängeln vollkommen abhelfen, sondern zugleich des Herrn Verfassers doppelte Rücksicht auf die Möglichkeit und Unmöglichkeit der einfachen Factoren von der Function $\alpha + \beta x + \gamma xx$, ganz entbehrlich machen. Es ist nämlich $dy = \frac{dx}{\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma xx)}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\left(xx + \frac{\beta}{\gamma} x + \frac{\alpha}{\gamma}\right)}}$.

Um das zweyte Glied der Größe unter dem Wurzelzeichen wegzuschaffen, setze man $x = z - \frac{1}{2} \frac{\beta}{\gamma}$, so ist $dx = dz$, und $dy = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{\left(zz + \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)}}$.

Hievon ist zwar das Integral schon nach dem 77. §., (114. Seite, 5. Zeile von unten) ganz leicht gefunden, wenn man dort $a = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$, das dortige

$c = 1$, und das dortige $b = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\beta^2}{\gamma^2}$ setzet; man kann aber zuvor auch der überflüßigen Forderung des Herrn Verfassers, daß der Differenzialgleichung eine rationale Form gegeben werden soll, dadurch genug thun, daß man $V\left(zz + \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right) = z \cdot u$, folglich $zz = \frac{\alpha:\gamma - \frac{1}{4}\beta^2:\gamma^2}{uu - 1}$ setzet; alsdann ist $dz = \left(\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right) \cdot \frac{-udu}{z(uu-1)^2}$, und $dy = \frac{1}{V\gamma} \cdot \left(\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right) \cdot \frac{-udu}{zzu(uu-1)^2} = \frac{1}{V\gamma} \cdot \frac{du}{1-uu}$. Nach §. 76. No. 3., ist $y = \frac{1}{2V\gamma} \cdot \log \frac{1+u}{1-u} + \text{Const}$, wobey $u = \frac{1}{z} \cdot V\left(zz + \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right)$, und $z = x + \frac{1}{2} \frac{\beta}{\gamma}$ nie die geringste Dunkelheit über den gegebenen Coefficienten α, β, γ, zurücklassen.

III. Durch diese Methode wäre auch $dY = dx\, V(\alpha + \beta x + \gamma xx)$ sehr leicht sowohl rational zu machen als zu integriren. Wenn nämlich z und u die vorigen Werthe behalten, so ist $dY = V\gamma \cdot dz\, V\left(zz + \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right) = \left(\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right) \cdot V\gamma \cdot \frac{-uudu}{(uu-1)^2}$. Um sich hiebey nicht erst mit Zerfällungen (79, 81. §.) aufzuhalten, setze man $uu - 1 = u^2\zeta^2$, folglich $uu = \frac{1}{1-\zeta^2}$, und um abzukürzen, $\left(\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{4} \frac{\beta^2}{\gamma^2}\right) \cdot V\gamma = B$; so ist

$dy = - B . \frac{dz}{z^3 . \sqrt{(1 - z^2)}}$, wovon das Integral im 87. §. 8. Zusatz stehet, nämlich $Y = \frac{B . \sqrt{(1 - z^2)}}{2 z^2} - \frac{1}{2} B . \int \frac{dz}{z \sqrt{(1 - z^2)}} + \text{Const} = B \frac{\sqrt{(1 - z^2)}}{2 z^2} - \frac{1}{2} B \log \frac{1 - \sqrt{(1 - z^2)}}{1 + \sqrt{(1 - z^2)}} + \text{Const} = B . \frac{\sqrt{(1 - z^2)}}{2 z^2} - B . \log \frac{z}{1 + \sqrt{(1 - z^2)}} + \text{Const}$. Hiebey ist $\zeta = \frac{\sqrt{(1 - uu)}}{u}$, und $\sqrt{(1 - \zeta^2)} = \frac{1}{u}$.

Zu §. 83. 2. Zusatz.

Wenn man in dem 77. §., (114. Seite, 5. Zeile von unten), $a = 1$, $b = \alpha$, $c = \gamma$ setzt; so erhält man $\int \frac{dx}{\sqrt{(\alpha + \gamma x x)}} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} . \log \left[x \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{\alpha} x x + 1 \right)} \right] + \text{Const} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} . \log \frac{\sqrt{(\alpha + \gamma x x)} + x \sqrt{\gamma}}{\sqrt{\alpha}} + \text{Const}$. Multiplicirt man Zähler und Nenner mit $\sqrt{(\alpha + \gamma x x)} - x \sqrt{\gamma}$, so wird dieses Integral $= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} . \log \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{(\alpha + \gamma x x)} - x \sqrt{\gamma}} + \text{Const}$; für $x = 0$, wird auch Constans $= 0$; vollkommen wie in dem gegenwärtigen Zusatze.

Zu §. 85. 2. Zusatz.

Um endlich auch selbst das Integral von $dy = \frac{- pp dp}{2 (pp - 1)} - \frac{qq dq}{2 (qq + 1)}$ zu finden, bemerke man,

man, daß $\frac{pp}{pp-1} = 1 - \frac{1}{1-pp}$, und $\frac{qq}{qq+1} = 1 - \frac{1}{1+qq}$, folglich $dy = -\frac{1}{2}dp + \frac{1}{2}.\frac{dp}{1-pp} - \frac{1}{2}dq + \frac{1}{2}\frac{dq}{1+qq}$ ist. Weil nun $\int\frac{dp}{1-pp}$ aus dem 76. §. No. 3., und $\int\frac{dq}{1+qq}$ aus dem 51. §. No. 2. bekannt sind, so ist $y = -\frac{1}{2}p + \frac{1}{4}\log\frac{1+p}{1-p} - \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}Arc.\tan q$ + Const. Restituirt man die Werthe von p und q, so wird $\int\frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}-\sqrt{(1-xx)}} = -\frac{\sqrt{(1+xx)}+\sqrt{(1-xx)}}{2x} + \frac{1}{4}\log\frac{x+\sqrt{(1+xx)}}{x-\sqrt{(1+xx)}} + \frac{1}{2}Arc.\tan\frac{\sqrt{(1-xx)}}{x}$ + Const.

Zu §. 87., No. 1.

Wäre die Potenz von x^{m-n} noch zu groß, folglich noch nicht $\int x^{m-n}.dx(ax^n+b)^p$, sondern nur $\int x^{m-2n}.dx(ax^n+b)^p$ oder $\int x^{m-3n}.dx(ax^n+b)^p$ als gegeben anzusehn: so könnte man das gesuchte $\int x^m dx(ax^n+b)^p$ folgendergestalt auf das bekannte Integral zurückbringen: in der Gleichung (139. Seite, 5. Zeile) setze man überall $m-n$ anstatt m, so ist $\int x^{m-n}.dx(ax^n+b)^p = \frac{x^{m-2n+1}}{a(m+n(p-1)+1)}.(ax^n+b)^{p+1} - \frac{(m-2n+1)b}{(m+n(p-1)+1)a}.\int x^{m-2n}.dx(ax^n+b)^p$; setzt man

man diesen Werth in dieselbe Gleichung (139. Seite, 5. Zeile), so erhält man $\int x^m dx (ax^n + b)^p$
$$= \frac{x^{m-n+1}}{a(m+np+1)} \cdot (ax^n + b)^{p+1}$$
$$- \frac{(m-n+1)(m-2n+1)b^2}{(m+np+1)(m+n(p-1)+1)a^2} \cdot \int x^{m-2n} \cdot$$
$dx\,(ax^n + b)^p$, durch dergleichen wiederholte Reductionen würde man in dem letzten Theile des Integrals immer auf geringere Potenzen von x^{m-3n}, x^{m-4n} u. s. w. kommen.

Zu §. 87. 8. Zusatz.

Das Integral $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ ist für $m = 0$, aus dem 51. §. bekannt; allgemein aber, wenn m grade und positiv ist, wohin auch selbst $m = 0$ gehört, so hängt das Integral mit vom Kreisbogen ab; ist m negativ und ungrade, so führt es allemal auf Logarithmen; in allen andern Fällen, da m eine ganze Zahl bleibt, ist das Integral algebraisch.

Zu §. 88. No. 2.

Wenn m eine negative Zahl, größer als 2; p eine negative ganze oder gebrochene Zahl, auch größer als 2; n aber positiv, und das Integral $\int x^{m+n} \cdot dx\,(b + ax^n)^{p+1}$, oder $\int x^{m+n} \cdot dx\,(b + ax^n)^{p+2}$, oder $\int x^{m+2n} \cdot dx (b + ax^n)^{p+2}$ u. s. w. gegeben wäre: so ließe sich das gesuchte Integral $\int x^m dx\,(b + ax^n)^p$ darauf folgendergestalt zurück bringen. In der letzten Gleichung in No.

No. 2., setze man überall $m + n$ anstatt m, so ist (♃) $\int x^{m+n}.\, dx\, (b + ax^n)^p = \frac{-x^{m+n+1}}{n(p+1)b}.$ $(b + ax^n)^{p+1} + \frac{m + n(p+2) + 1}{n(p+1)b}.\int x^{m+n}.$ $dx\, (b + ax^n)^{p+1}$; diesen Werth in die letzte Gleichung in §. 87. No 2. gesetzt, giebt (♄)

$$\int x^m dx\, (b + ax^n)^p = \frac{x^{m+1}}{b(m+1)}.(b + ax^n)^{p+1}$$
$$+ \frac{a(m+n+np+1)}{n(p+1)(m+1)b^2}.x^{m+n+1}.(b + ax^n)^{p+1}$$
$$- \frac{a(m+n+np+1).(m+np+2n+1)}{n(p+1)(m+1)b^2}.\int x^{m+n}.$$
$$dx\, (b + ax^n)^{p+1}.$$

Wenn man in der Gleichung (♃) überall $p + 1$ anstatt p schreibt, und hieraus den Werth von $\int x^{m+n}.\, dx\, (b + ax^n)^{p+1}$ in das letzte Glied der Gleichung (♄) setzt, so wird das gesuchte $\int x^m dx\, (b + ax^n)^p$ schon auf das $\int x^{m+n}.\, dx$ $(b + ax^n)^{p+2}$ zurückgebracht seyn. Schreibt man aber in der Gleichung (♄) überall $m + n$ anstatt m, und $p + 1$ anstatt p; und setzt man diesen neuen Werth von $\int x^{m+n}.\, dx\, (b + ax^n)^{p+1}$ selbst in das letzte Glied der Gleichung (♄): so wird das gesuchte $\int x^m dx\, (b + ax^n)^p$ von dem $\int x^{m+2n}.$ $dx\, (b + ax^n)^{p+2}$ abhangen; man kann offenbar mit diesen Reductionen fortfahren so weit man will.

Aus dem bisherigen erhellet, ohne erst alles von neuem umständlich auseinander zu setzen, wie man in dem Falle verfahren müßte, wenn m, p und n positive Zahlen, und m sowohl als p größer als 2 wären, folglich in No. 1. im Buche, das ge-

gesuchte $\int x^m dx\,(b + ax^n)^p$ von dem $\int x^{m-n}.\,dx\,(ax^n + b)^{p-1}$, oder von dem $\int x^{m-2n}.\,dx(ax^n + b)^{p-1}$, oder von dem $\int x^{m-2n}.\,dx\,(ax^n + b)^{p-2}$ u. s. w. abhangen sollte.

Zu §. 90.

Das gegenwärtige Integral ist das wichtigste für die Lehre vom Pendel. Im 134. §. der Mechanik giebt der Herr Verfasser die Reihe für die Zeit eines Schwunges, verweiset aber auf den Beweis in Herrn Eulers Mechanica und in Herrn Hofrath Kästners Anfangsgründen der höhern Mechanik. Jetzt könnte er selbst den Beweis auf diese Art vollständig führen:

Die Zeit des Niederganges durch den Bogen BM (daselbst fig. 156.) sey t, die Geschwindigkeit in $M = c$, und der Bogen $BM = s$, so ist nach dem 113. §. der Mechanik, die Zeit für den verschwindenden Bogen Mm, $= dt = \frac{1}{c}.\,ds$; und nach dem 56 und 130. §. der Mechanik ist $c = 2\sqrt{\frac{g.P}{M}.DP} = 2\sqrt{(gp.DP)}$, für $\frac{P}{M} = p$; folglich $dt = \frac{ds}{2\sqrt{(gp.DP)}}$, und $t = \frac{1}{2\sqrt{gp}}.\int\frac{ds}{\sqrt{DP}}$. Setzt man $AD = b$, $CM = CA = a$, $AP = x$, $PM = y$; so ist $DP = b - x$, $y = \sqrt{(2ax - xx)}$, und (48. §. der mathem. Analys.) $ds = dx\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$ $= dx\sqrt{\left(1 + \frac{(a-x)^2}{2ax - xx}\right)} = \frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, wie im

im 51. §. No. 6. der mathem. Analysis, nur daß dort der Halbmesser $a = 1$ ist. Also ist $t = \frac{a}{2\sqrt{gp}}$. $\int \frac{dx}{\sqrt{((b-x)(2ax-xx))}}$. Setzt man nun im gegenwärtigen 90. §. $c = 2a$, so erhält man $t = \frac{1}{2}\pi \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2gp}} \cdot \left[1 + (\tfrac{1}{2})^2 \cdot \frac{b}{2a} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^3 + \ldots\ldots\right]$, als die Zeit für den ganzen Niedergang durch den Bogen BA. Wollte man die Zeit des Schwunges durch den ganzen Bogen BAE wissen, so dürfte man nur den gefundenen Werth verdoppeln, welcher alsdenn mit der Reihe auf der 79. Seite der Mechanik vollkommen einerley wäre.

Zu §. 91.

Dieser wichtige Lehrsatz sagt eigentlich dieses: wenn $dy = Xdx = P.Q.dx$, und X, folglich auch die Factoren P und Q Functionen von der einzigen veränderlichen Größe x sind; so ist y oder $\int Xdx = Q.\int Pdx - \int(dQ.\int Pdx)$. Die Wahrheit dieses Satzes fällt gleich daraus in die Augen, daß man wiederum umgekehrt durch das Differenziren, $PQdx = Q.Pdx + dQ.\int Pdx - dQ.\int Pdx = PQdx$ findet. So kurz aber und so einleuchtend auch dieser Beweis ist, so läßt er doch nicht die gehörige Spur eines Weges zurück, auf welchem man

zu diesem Lehrsatze selbst gelangen konnte. Deßwegen ist das Verfahren im Buche weit vollkommener, die einzige Dunkelheit ausgenommen, welche die beyden ersten Zeilen der Auflösung, „(Es ist allemal $d.pq = pdq + qdp$, also pq „ $= \int pdq + \int qdp$)" verursachen könnten. Freylich ist allemal $d.pq = pdq + qdp$ (34 und 60. §.), wenn auch p und q, jedes für sich eine Function von mehreren unterschiedenen veränderlichen Größen wäre; allein es ist nicht umgekehrt auch allemal $pq = \int pdq + \int qdp$. Nur in dem einzigen Falle ist diese Folgerung wahr, wenn p und q zusammen Functionen einer einzigen veränderlichen Größe sind. Anstatt „also $pq = \int pdq + \int qdp$", muß man daher lesen: also für den gegenwärtigen Fall, da p und q Functionen von der einzigen veränderlichen Größe x seyn müssen, $pq = \int pdq + \int qdp$.

Zu §. 92. 1. Zusatz.

„In dem besondern Fall $P = \frac{1}{x}$, hat „man $\int \frac{dx}{x} lx = \frac{1}{2}(lx)^2 + C.$" Man muß nicht glauben, daß dieser Fall so besonders wäre, daß er irgend eine Ausnahme von der allgemeinen Regel in dem 92. §. machte. Denn setzt man $\frac{1}{x} = P$, mithin $\int Pdx = Z = \log x$, und $Q = \log x$, so ist unmittelbar nach jener Regel, $y = \log x . \log x - \int \log x . \frac{dx}{x} = (\log x)^2 - \frac{1}{2}(\log x)^2 = \frac{1}{2}(\log x)^2 + \text{Const.}$

Zu

Zu §. 95. No. 2.

„So findet man $\int a^x X dx = \frac{1}{la} a^x X -$

„ $\frac{1}{(la)^2} . a^x P - \frac{1}{(la)^3} . a^x Q - \frac{1}{(la)^4} . a^x R \ldots\ldots$"

Nach der Regel des 91. §. hat man $\int a^x X dx = \frac{1}{la} a^x X - \frac{1}{la} . \int a^x dX$. Man setze $dX = P dx$, folglich $\int a^x dX = \int a^x dx . P$, wobey $\int a^x dx = \frac{1}{la} . a^x$ ist: so ist wiederum nach dem 91. §. (dort Z, hier $\frac{1}{la} a^x$; dort Q, hier P), $\int a^x dX = \frac{1}{la} a^x P - \frac{1}{la} . \int a^x dP$, und $\int a^x X dx = \frac{1}{la} a^x X - \frac{1}{(la)^2} . a^x P + \frac{1}{(la)^2} . \int a^x dP$. Hier setze man $dP = Q dx$, folglich $\int a^x dP = \int a^x dx . Q$, so ist wiederum nach dem 91. §. (dort Z, hier $\frac{1}{la} a^x$; dort Q, hier Q), $\int a^x dP = \frac{1}{la} a^x Q - \frac{1}{la} . \int a^x dQ$, und $\int a^x X dx = \frac{1}{la} a^x X - \frac{1}{(la)^2} a^x P + \frac{1}{(la)^3} a^x Q - \frac{1}{(la)^3} . \int a^x dQ$. Setzt man hierin $dQ = R dx$, folglich wiederum nach dem 91. §., $\int a^x dQ = \frac{1}{la} a^x R - \frac{1}{la} . \int a^x dR$; so ist $\int a^x X dx = \frac{1}{la} a^x X - \frac{1}{(la)^2} a^x P + \frac{1}{(la)^3} a^x Q - \frac{1}{(la)^4} a^x R + \frac{1}{(la)^4} . \int a^x dR$. Setzt man ferner $dR = S dx$, so ist wegen §. 91., $\int a^x X dx =$

$\frac{1}{la}a^xX - \frac{1}{(la)^2}a^xP + \frac{1}{(la)^3}a^xQ - \frac{1}{(la)^4}a^xR + \frac{1}{(la)^5}.a^xS - \frac{1}{(la)^5}.\int a^xdS$. Hieraus erhellet, daß im Buche (159. Seite, 3. Zeile von unten) falsch vor allen Gliedern, die nach dem ersten folgen, das negative Zeichen stehet; die Zeichen wechseln ab, und hiemit stimmen auch die Exempel im ersten Zusatz überein.

„Ist nun X eine rationale ganze Func„tion von x, so kommt man endlich auf das „Integral $\int a^xdx = \frac{1}{la}a^x$, und kann das ge„suchte Integral vollständig angeben."

Die Coefficienten P, Q, R u. s. w. sind eigentlich bestimmte Functionen von X, mithin von x. Es ist nämlich $P = \frac{dX}{dx}$, $Q = \frac{dP}{dx} = \frac{ddX}{dx^2}$, $R = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^3X}{dx^3}$, $S = \frac{dR}{dx} = \frac{d^4X}{dx^4}$, u. s. w., folglich $\int a^xXdx = \frac{1}{la}a^xX - \frac{1}{(la)^2}a^x.\frac{dX}{dx} + \frac{1}{(la)^3}a^x.\frac{ddX}{dx^2} - \frac{1}{(la)^4}.a^x.\frac{d^3X}{dx^3} + \frac{1}{(la)^5}a^x.\frac{d^4X}{dx^4}\ldots\ldots$; überhaupt ist das rte Glied $= \pm\frac{1}{(la)^r}.a^x.\frac{d^{r-1}X}{dx^{r-1}}$, dabey gilt das obere Zeichen für ein ungrades r, das untere für ein grades r. Aus dieser Reihe erhellet am deutlichsten, daß wenn X eine rationale ganze Function von x, und zwar von r Dimensionen ist, die rte Differenzirung von X ein o, und $\frac{d^{r-1}X}{dx^{r-1}}$ eine beständige Größe

$= B$,

$= B$, folglich das letzte Glied des vollständigen Integrals $= \pm B \frac{a^x}{(la)^r}$ seyn muß. Es sey z. B. aus dem ersten Zusatze $X = x^n$, so ist $\frac{dX}{dx} = nx^{n-1}$, $\frac{ddX}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$, $\frac{d^3X}{dx^3} = n(n-1).(n-2)x^{n-3}$ u. s. w., folglich

$$\int a^x x^n dx = \frac{1}{la}.a^x x^n - \frac{n}{(la)^2} a^x x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{(la)^3} a^x x^{n-2}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{(la)^4}.x^{n-3} \ldots\ldots$$
$$\pm \frac{n(n-1)\ldots\ldots[n-(n-1)]}{(la)^{n+1}} a^x x^{n-n}$$

mit diesem Gliede bricht die Reihe ab, wenn n eine positive ganze Zahl ist, wobey das obere Zeichen für ein grades n, das untere für ein ungrades n gilt.

Zu §. 96. 2. Zusatz.

„So wie $\int \frac{dx}{(1-xx)^3}$ Arc sin x (eigentlich „$\int \frac{dx}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$ Arc sin x) $= \frac{x}{\sqrt{(1-xx)}}$ Arc sin x „$+ l\sqrt{(1-xx)}$."

Für $X = \frac{1}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$, ist in dem 96. §., $P = \int \frac{dx}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$; dieses Integral ist nach dem 65. §. leicht gefunden,

dort ist	m	a	b	p	z
hier	0	1	-1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1-xx}{xx}$

folglich dort $-\frac{1}{2}.\int z^{-\frac{3}{2}}.dz = \frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{x}{\sqrt{(1-xx)}}$.

Also ist $\int \frac{dx}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}.$ *Arc* sin $x = \frac{x}{\sqrt{(1-xx)}}$.

Arc sin $'x - \int \frac{xdx}{1-xx} = \frac{x}{\sqrt{(1-xx)}}$ *Arc* sin x $+ \log \sqrt{(1-xx)} +$ Const.

Zu §. 97. Zusatz.

Weil hier $X = 1$, und überdieß $d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, oder $u = \frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$, folglich $\varphi =$ *Arc* sin x seyn soll: so wäre eigentlich die Gleichung diese $dy = (Arc.\sin x)^n\, dx$. Ferner findet man $P = \int X dx = x$, $Q = \int \frac{xdx}{\sqrt{(1-xx)}} = -\sqrt{(1-xx)}$, (§. 87. 8. Zus.), $R = \int -dx = -x$, $S = \int \frac{-xdx}{\sqrt{(1-xx)}} = +\sqrt{(1-xx)}$, $T = \int Sudx = +x$, $V = \int Tudx = \int \frac{xdx}{\sqrt{(1-xx)}} = -\sqrt{(1-xx)}$, $W = \int Vudx = -x$, u. s. w., man sieht daß die folgenden Coefficienten immer in derselben Ordnung vorkommen, in welcher die vier ersten auf einander folgten. Also ist

$$\int \varphi^n dx = \varphi^n x + n\varphi^{n-1}.\sqrt{(1-xx)}$$
$$-n(n-1)\varphi^{n-2}.x$$
$$-n(n-1)(n-2)\varphi^{n-3}\sqrt{(1-xx)}$$
$$+n(n-1)(n-2)(n-3)\varphi^{n-4}.x$$
$$+$$

$+n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\varphi^{n-5}.\sqrt{(1-xx)}$
$-[n(n-1)\ldots(n-5)]\varphi^{n-6}.x-\ldots.$

Hiernach muß die Reihe im Buche (163. Seite, 2. Zeile) verbessert werden.

Zu §. 98.

Was in diesem Paragraph und dessen Zusätzen gesagt wird, stehet alles schon in dem 87. §. 8. Zusatz vollkommen da. Man setze nämlich $\sin\varphi = x$, so ist $d\varphi = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ (63. §.), und

$d\varphi \sin\varphi^n = \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-xx)}} = -\frac{1}{n}x^{n-1}.\sqrt{(1-xx)}$
$+\frac{n-1}{n}.\int\frac{x^{n-2}.dx}{\sqrt{(1-xx)}}$. Setzt man aber $\cos\varphi$
$= x$, folglich $d\varphi\cos\varphi^n = \frac{-x^n dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, so erhält man wiederum nach dem 87. §. 8. Zusatz, $\int d\varphi\cos\varphi^n$
$= \int\frac{-x^n dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1}{n}x^{n-1}.\sqrt{(1-xx)}$
$+\frac{n-1}{n}.\int\frac{-dx.x^{n-2}}{\sqrt{(1-xx)}}$, vollkommen wie im 2. Zusatz des 98. §.

Im zweyten Zusatz, nach den Worten: „Man findet," setze man hinzu: unmittelbar aus der Gleichung (163. Seite, 6. Zeile von unten), wenn man dort $90^\circ-\varphi$ anstatt φ setzet.

Zu §. 99

Auch diese Aufgabe ist schon durch den 87. und 88. §. vollkommen aufgelöst. Ueberhaupt kön-

können diese beyden Paragraphen, wegen ihrer Reichhaltigkeit, nicht genug empfohlen werden. Man setze nämlich $\sin\varphi = x$, so ist $d\varphi . \sin\varphi^m . \cos\varphi^n = x^m dx\,(1 - xx)^{\frac{n-1}{2}}$. Wenn man dieß fürs erste mit dem 87. §. No. 1. vergleicht, so ist $\int x^m dx\,(1 - xx)^{\frac{n-1}{2}} = - \frac{x^{m-1}}{m+n}(1 - xx)^{\frac{n+1}{2}} + \frac{m-1}{m+n} . \int x^{m-2} . (1 - xx)^{\frac{n-1}{2}} . dx$, folglich mit No. 1. im 99. §. einerley. Wenn man aber fürs zweyte jenes Differenzial mit dem 88. §. No. 1. vergleicht, so ist $\int x^m dx\,(1 - xx)^{\frac{n-1}{2}} = \frac{x^{m+1}}{m+n} . (1 - xx)^{\frac{n-1}{2}} + \frac{n-1}{m+n} . \int dx . x^m (1 - xx)^{\frac{n-1}{2}-1}$, welches mit No 2. im 99. §. einerley ist. Z. B. setze man $n = 1$, so giebt die gegenwärtige zweyte Gleichung $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+n}$, und die Gleichung No. 2. im Buche giebt $\int d\varphi \sin\varphi^m . \cos\varphi = \frac{1}{m+1} . \sin\varphi^{m+1}$, mithin einerley. Für $n = 2$, giebt die obige zweyte Gleichung $\int x^m dx\,(1 - xx)^{\frac{1}{2}} = \frac{x^{m+1}}{m+2} . (1 - xx)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{m+2} \int \frac{x^m dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$, welches durch den 8. Zusatz des 87. §. so gut als gegeben ist; die Gleichung No. 2. im Buche giebt, für $n = 2$, $\int d\varphi \sin\varphi^m \cos\varphi^2 = \frac{1}{m+2} . \sin\varphi^{m+1} . \cos\varphi + \frac{1}{m+2} . \int d\varphi \sin\varphi^m$, abermal ein gleiches Resultat. Für $n = 3$, giebt die hiesige zweyte Glei-

Gleichung $\int x^m (1 - xx)\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+3} \cdot (1 - xx)$
$+ \frac{2 x^{m+1}}{(m+1)(m+3)}$; und die Gleichung No. 2. im Buche giebt $\int d\varphi \sin \varphi^m \cdot \cos \varphi^3 = \frac{1}{m+3}$. $\sin \varphi^{m+1} \cdot \cos \varphi^2 + \frac{2}{(m+1)(m+3)} \cdot \sin \varphi^{m+1}$; beyde Gleichungen geben also einerley Resultate, u. s. w.

Zu §. 99. Zusatz.

„Vermittelst dieser Reductionen kommt „man endlich so weit, daß entweder einer von „beyden Factoren $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, ganz aus der „Formul wegfällt, oder doch nur die erste Po„tenz davon bleibt.“

Man setze in der Gleichung No. 1., überall $m - 2$ anstatt m, so ist $\int d\varphi \sin \varphi^{m-2} \cdot \cos \varphi^n$
$= - \frac{1}{m+n-2} \cdot \sin \varphi^{m-3} \cdot \cos \varphi^{n+1}$
$+ \frac{m-3}{m+n-2} \cdot \int d\varphi \sin \varphi^{m-4} \cdot \cos \varphi^n$; diesen Werth setze man selbst in die Gleichung No. 1., so wird $\int d\varphi \sin \varphi^m \cdot \cos \varphi^n = - \frac{1}{m+n} \cdot \sin \varphi^{m-1}$.
$\cos \varphi^{n+1} - \frac{m-1}{(m+n)(m+n-2)} \cdot \sin \varphi^{m-3}$.
$\cos \varphi^{n+1} + \frac{(m-1)(m-3)}{(m+n)(m+n-2)} \cdot \int d\varphi \sin \varphi^{m-4}$.
$\cos \varphi^n$; das sind die Reductionen, dergleichen der Herr Verfasser in diesem Zusatze meynt, und die

die man auch bey der Gleichung in No. 2. fortsetzen kann. Man muß aber nicht glauben, daß einer von den beyden Factoren sin ϕ, cos ϕ, dadurch ganz aus der Formel wegfällt, wie es im Buche heißt; er kann nur aus dem letzten Theile der Formul wegfallen.

Zu §. 100. 2. Zusatz.

Nach den Worten (167. Seite, 4. Zeile von unten): die erste Reduction giebt, setze man hinzu: wenn man in der Gleichung (164. Seite, 2. Zeile von unten) überall $m + 1$ anstatt m, und $n + 1$ anstatt n schreibt, alsdenn aber m und n negativ nimmt.

Nach den Worten (167. Seite, letzte Zeile): die zweyte aber, setze man hinzu: wenn man in der Gleichung (165. Seite, 12. Zeile) überall $m + 3$ anstatt m, und $n + 1$ anstatt n schreibt, alsdenn aber m und n negativ setzt.

Uebrigens findet man auch die letzte Gleichung dieses Zusatzes wiederum unmittelbar aus Anmerk. zu §. 88., No. 2. Es sey nämlich sin ϕ $= x$, so ist $\frac{d\phi}{\sin\phi^m . \cos\phi^n} = \frac{dx}{x^m . (1 - xx)^{\frac{n+1}{2}}}$. Setzt man nun in der eben erwähnten Anmerkung, $n = 2$, $p = -\frac{n+1}{2}$, $b = 1$, $a = -1$, und m negativ; so verwandelt sich die dortige Gleichung (ℌ) in eine, die von dem $\int \frac{dx}{x^{m-2} . (1 - xx)^{\frac{n+1}{2} - 1}}$

ab,

abhängt, und die im Grunde mit der letzten Gleichung dieses Zusatzes vollkommen einerley ist.

Zu §. 102. 2. Zusatz.

Für $a = b$, ist diese Bestimmung der Coefficienten A und m ganz unbrauchbar, und man wird das folgende Verfahren wählen. Es sey $\cos\phi = \frac{1-xx}{1+xx}$, folglich $x = \tang \frac{1}{2}\phi$, so ist nach dem 102. §., $\frac{d\phi}{(a+b\cos\phi)^2} = \frac{2(1+xx)dx}{(a+b+(a-b)xx)^2}$; für $a = b$, ist hievon das Integral $= \frac{x+\frac{1}{3}xx}{2aa}$, oder $\frac{1}{aa}.\int\frac{d\phi}{(1+\cos\phi)^2} = \frac{\tang\frac{1}{2}\phi + \frac{1}{3}\tang\frac{1}{2}\phi^3}{2aa}$, welches unter andern zur Quadratur der parabolischen Ausschnitte dient, wenn eine Gleichung zwischen dem Winkel ϕ und der veränderlichen Entfernung z gegeben wäre (man s. Anmerk. zu §. 146. Zusatz). In allen übrigen Fällen, da nicht $a = b$ ist, kann man das Integral entweder nach der Methode im Buche, oder auf die folgende Art finden, welche ich, bloß um den Anfänger mit dem reichhaltigen 88. §. bekannter zu machen, hier beyfüge. Es ist $\frac{2(1+xx)dx}{(a+b+(a-b)xx)^2}$ $= \frac{2dx}{(a+b+(a-b)xx)^2} + \frac{2xxdx}{(a+b+(a-b)xx)^2}$; vergleicht man den ersten Theil mit dem 88. §. No. 2.

dort	p	m	n	b	a
hier	-2	0	2	$a+b$	$a-b$

so ist $2\int\frac{dx}{(a+b+(a-b)xx)^2}=\frac{x}{a+b}\cdot\frac{1}{a+b+(a-b)xx}$ $+\frac{1}{2(a+b)}\cdot\int\frac{2\,dx}{a+b+(a-b)xx}$. Der zweyte Theil oben wird auch leicht nach dem 88. §., 2. Zusatz (148. Seite, 4. Zeile) gefunden, wo alle Zeichen die vorige Bedeutung behalten, ausgenommen $m=2$; also $2\int\frac{xxdx}{(a+b+(a-b)xx)^2}$ $=\frac{-x}{a-b}\cdot\frac{1}{a+b+(a-b)xx}+\frac{1}{2(a-b)}\cdot\int\frac{2\,dx}{a+b+(a-b)xx}$. Beyde Theile zusammen addirt, geben $\int\frac{2(1+xx)\,dx}{(a+b+(a-x)xx)^2}=\frac{-2bx}{(aa-bb)\cdot(a+b+(a-b)xx)}$ $+\frac{a}{a^2-b^2}\cdot\int\frac{2\,dx}{a+b+(a-b)xx}$; grade dieß Integral kommt auch im Buche heraus, wenn man dort $\cos\phi=\frac{1-xx}{1+xx}$, folglich $\sin\phi=\frac{2x}{1+xx}$ setzet. Der Theil $\int\frac{2\,dx}{a+b+(a-b)xx}$ ist schon sowohl für $a>b$, als auch für $a<b$ im 102. §. gefunden. Für $a>b$, ist $\int\frac{d\phi}{(a+b\cos\phi)^2}$ $=\frac{2a}{(aa-bb)^{3:2}}\cdot Arc\ \mathrm{tang}\ \frac{(a-b)\ \mathrm{tang}\ \frac{1}{2}\phi}{\sqrt{(aa-bb)}}$ $-\frac{2b\cdot\mathrm{tang}\ \frac{1}{2}\phi}{(aa-bb)\cdot(a+b+(a-b)\ \mathrm{tang}\ \frac{1}{2}\phi^2)}$; oder auch, weil $\mathrm{tang}\ \frac{1}{2}\phi=\sqrt{\frac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi}}$ ist, $\int\frac{d\phi}{(a+b\cos\phi)^2}$ $=\frac{1}{aa-bb}\cdot\left(\frac{2a}{\sqrt{(aa-bb)}}\cdot Arc\mathrm{tang}\sqrt{\frac{(a-b)(1-\cos\phi)}{(a+b)(1+\cos\phi)}}\right.$ $\left.-\frac{b\sin\phi}{a+b\cos\phi}\right)$, welches für die Quadratur ellip-

tischer

tischer Sectoren wichtig ist, man s. 146. §. Zusatz.

Zu §. 105. No. 1.

Des Herrn Verfassers Untersuchung der Amplitude eines Bogens ist im Grunde doch nur auf des Bogens Differenzial *Mm* eingeschränkt; das zeigen auch die Worte an: „da denn derje„nige Werth $d\varphi$ verstanden werden muß, wel„cher mit $Pp = dx$ zusammengehört;" auch die Worte: „alsdann ist tang *PMT* oder tang φ „$=$ der Gränze des Werthes $\frac{dx}{dy}$;" denn mit dx verschwindet auch *Mm*. Allein in allen Fällen, wo die Abscissenlinie *AC* (fig. 11.) auf die Tangente in *A* senkrecht stehet, ist zugleich die Amplitude des Bogens $AM = PMT = \varphi$, und der Ausdruck tang $\varphi = \frac{dx}{dy}$ aus dem 46. §., giebt selbst die Tangente dieser Amplitude; denn alsdenn ist offenbar $PMT = ANM$. Sonst aber kann man bey der 14. fig., wenn des Bogens *BM* Amplitude $BDM = \psi$ ist, nicht sagen, daß $\psi = PMT = \varphi$ sey; weil dort eine durch *B* mit *AC* parallel gezogene Linie auf die Tangente in *B* nicht senkrecht wäre: sondern für dergleichen Fälle ist immer $\psi = \varphi \pm \alpha$, wenn nämlich α einen unveränderlichen Winkel bedeutet. Das einzige aber bleibt wohl in allen Fällen ohne Ausnahme wahr, daß nämlich $d\psi = d.(\varphi \pm \alpha) = d\varphi$ ist; und im Grunde nur diese letzte Gleichung $d\psi = d\varphi$ hat der Herr Verfasser hier in Betrachtung ge-

gezogen. Ich werde in der Folge öfters auf diese Anmerkung zurückweisen müssen.

Zu §. 105. 2. Zusatz.

„Eben dasselbe ergeben auch die allge„meinen Formeln." Warum muß aber der Herr Verfasser dennoch gleich darauf in der vierten Zeile diesen allgemeinen Formeln, durch die Betrachtung seiner grade so und nicht anders gezeichneten Figur, zu Hülfe kommen, wenn er nämlich sagt, *mE* sey größer als *me*, dabey also sich bloß auf seine Zeichnung stützt, die ihm den Winkel *mEe* spitz und den Winkel *meE* stumpf gab? Daß der Winkel *mEe* immer spitz seyn muß, hat er bisher eben so wenig bewiesen, als er es aus den allgemeinen Formeln selbst herleitet.

Zu §. 105. 3. Zusatz.

„Auch ergeben das die Formeln für *MK* „und *MD*." Man sehe die Anmerk. zu §. 105. 2. Zusatz.

Zu §. 107.

„Ferner ist $\varphi = A.\ \mathrm{tang}\ \frac{dx}{dy}$."

Diese Gleichung ist aus dem 46. §. genommen, und sie setzt voraus, daß $\varphi = PMT$ ist. Da aber $d\varphi$ bey der gegenwärtigen Untersuchung des Krümmungshalbmessers offenbar das Differenzial der Amplitude des Bogens *BM* der krummen

men Linie bedeutet: so muß hiebey nothwendig die Frage entstehn: ob der Herr Verfasser die Amplitude des Bogens BM, $= PMT = \varphi$ setzt? Nähme er dieß an, so würde er zugleich voraussetzen, daß die Absciſſenlinie AC eine Normallinie sey; dadurch aber würde die Auflösung im Buche die häufigsten Fälle, wo die Absciſſenlinie keine Normallinie ist, gänzlich ausschließen, und der schönste Theil dieser Untersuchung, nämlich die nöthige Allgemeinheit würde wegfallen. Diese Schwierigkeit in dem Vortrage des Herrn Verfassers wird nun durch die Anmerkung zu §. 105. No. 1., gänzlich gehoben: nämlich, nicht als ob man hier $\varphi = PMT$ für des Bogens BM Amplitude $= \psi$ selbst nähme; sondern bloß um $d\psi$, für die allgemeine Gleichung $r = \frac{ds}{d\psi}$, zu bekommen, nimmt man hier die Gleichung tang $\varphi = \frac{dx}{dy}$ aus dem 46. §. zu Hülfe, weil man weiß (Anmerk. zu §. 105. No. 1.), daß immer $\psi = \varphi \pm \alpha$, folglich $d\psi = d\varphi$ seyn muß; nun ist aber $d\varphi = d. Arc$ tang $\frac{dx}{dy}$, u. s. w.

Zu §. 109. 2. Auflösung.

„In diesen zwey Gleichungen kann man „drey von den vier Größen y, h, ψ, r, dadurch „wegschaffen, daß man sie als Functionen der „vierten ausdruckt. Gesetzt man hat sie alle „durch h ausgedruckt," u. s. w.

Die

Die Möglichkeit dieser Voraussetzung wird auf die folgende Art erhellen: I. Daß man γ durch h ausdrucken kann, ist selbst aus der Bedingung der Aufgabe klar, welche eine Gleichung zwischen h und γ voraussetzt. II. Daß man r bloß durch h ausdrucken kann, wird so klar: im 1 Zusatz des 108. §., ist $r = \frac{ds^3}{(ds^2 + dh^2 - hddh)\, d\gamma}$; wäre auch $d\gamma$ veränderlich, so müßte man den Werth von r aus dem 108. §. nehmen: in beyden Fällen aber wird hierin $d\gamma$ nach (I.) als eine Function von dh ausgedruckt werden können; ferner ist (52. §. No. 2.) $ds = \sqrt{(dh^2 + h^2 d\gamma^2)}$, wo wiederum $d\gamma$ nach (I.) durch dh gegeben ist; also wäre nun r bloß eine Function von h. III. Wie ließe sich aber ψ, eigentlich sin ψ und cos ψ, als eine Function von h ausdrucken? Nach dem 52. §. No. 1., ist tang $\psi = \frac{hd\gamma}{dh}$, und nach (I.) ist $d\gamma$ durch dh gegeben.

Zu §. 112. 1. Auflösung.

„Die Größen u, ζ und r kann man durch „t ausdrucken."

Die Möglichkeit dieser Voraussetzung erhellet so: I. Aus der Bedingung der Aufgabe selbst, welche eine Gleichung zwischen u und $w = t - a$ erfordert, ist klar, daß sich u durch t ausdrucken läßt. II. Weil $\zeta = 90° - \phi$, und (111. §.) $\sin\phi = \frac{du}{\sqrt{(dt^2 + du^2)}}$, $\cos\phi = \frac{dt}{\sqrt{(dt^2 + du^2)}}$ ist;

ist; so ist $\cos \zeta = \frac{du}{\sqrt{(dt^2 + du^2)}}$, und $\sin \zeta = \frac{dt}{\sqrt{(dt^2 + du^2)}}$. Weil nun in (I.) u durch t gegeben ist, so bleibt ζ eine Function von t. III. Setzt man $AL = a$, und Bogen $LD = s$, so ist nach dem Zusatze des 110. §., DM oder $r = a + s$. Nach dem 48. §. ist aber $s = \int \sqrt{(dt^2 + du^2)}$, bloß durch t gegeben (I.), folglich bleibt auch r eine Function von t.

Zu §. 113.

Die Dunkelheit der Auflösung im Buche wird dem Anfänger hoffentlich durch die folgende Einleitung gänzlich verschwinden:

Nach dem 60. §. ist $dz = {}^y dz + {}^x dz + {}^y d^x dz$, oder welches einerley ist, $dz = {}^y dz + {}^x dz + {}^x d^y dz$ (man s. Anmerk. zu §. 60.). Setzt man in dem 2. Zusatz des 40. §, $b = dx$, und $\beta = dy$, so ist der vollständige Werth von dy,

$$= dy + \frac{ddy}{2} + \frac{d^3y}{2.3} + \frac{d^4y}{2.3.4} + \frac{d^5y}{2.3.4.5} + \ldots\ldots$$

Wenn man für den gegenwärtigen Fall in diese Reihe anstatt dy, erstlich ${}^y dz$, alsdenn ${}^x dz$, und endlich ${}^y d^x dz$ setzet; so erhält man die folgenden drey Reihen für den vollständigen Werth von dz:

$$\text{I. } {}^y dz = {}^y dz + \frac{{}^y ddz}{2} + \frac{{}^y d^3 z}{2.3} + \frac{{}^y d^4 z}{2.3.4} + \ldots\ldots$$

$$\text{II. } {}^x dz = {}^x dz + \frac{{}^x ddz}{2} + \frac{{}^x d^3 z}{2.3} + \frac{{}^x d^4 z}{2.3.4} + \ldots\ldots$$

III.

III. $${}^y d^x dz = {}^y d^x dz + \frac{{}^y dd . {}^x dz}{2} + \frac{{}^y d^3 . {}^x dz}{2.3} + \frac{{}^y d^4 . {}^x dz}{2.3.4} + \ldots\ldots$$

Anstatt dieser dritten Reihe aber kann man den Werth von ${}^y d^x dz$ auch auf diese Art vollständig angeben, wenn man nämlich jedes Glied der zweyten Reihe so differenzirt, daß man darin nur y veränderlich annimmt, und alsdann jedes dieser Differenziale durch eine Reihe, wie die für das vollständige dy war, ausdruckt. Also ist

$${}^y d^x dz = {}^y d^x dz + \frac{{}^y d^x d^2 z}{2} + \frac{{}^y d^x d^3 z}{2.3} + \frac{{}^y d^x d^4 z}{2.3.4} + \ldots.$$

und

IV. $${}^y d^x dz = {}^y d^x dz + \frac{{}^y d^2 . {}^x dz}{2} + \frac{{}^y d^3 . {}^x dz}{2.3} + \frac{{}^y d^4 . {}^x dz}{2.3.4} + \ldots$$

$$\frac{{}^y d^x d^2 z}{2} = \frac{{}^y d^x d^2 z}{2} + \frac{{}^y d^2 . {}^x d^2 z}{2.2} + \frac{{}^y d^3 . {}^x d^2 z}{2.2.3} + \ldots$$

$$\frac{{}^y d . {}^x d^3 z}{2.3} = \frac{{}^y d . {}^x d^3 z}{2.3} + \frac{{}^y d^2 . {}^x d^3 z}{2.3.2} + \ldots$$

Wenn man aber nicht gleich Anfangs die Reihe aus dem 40. §. 2. Zus. benutzt hätte, so wäre man auch auf die Reihen im Buche (196. Seite, 1. bis 5. Zeile) mit den unbestimmten Coefficienten gekommen, den Druckfehler in der fünften Zeile ausgenommen; daß also die dortige Reihe in der ersten Zeile mit der gegenwärtigen in (I.), die dortige in der zweyten Zeile mit der gegenwärtigen in (II.), und die dortigen drey Reihen in der dritten, vierten und fünften Zeile mit den gegenwärtigen drey Reihen in (IV.), einerley seyn müssen. Hieraus kann man nun die Coefficienten im Buche gehörig bestimmen, wenn man

man nur diejenigen Glieder der correspondirenden Reihen, worin gleiche Potenzen von dx und dy enthalten sind, einander gleichsetzt. Es muß nämlich $Pdy = {}^y dz$ seyn, also $P = \frac{{}^y dz}{dy}$; $Qdy^2 = \frac{{}^y ddz}{2}$, folglich $Q = \frac{{}^y ddz}{2dy^2}$; $Rdy^3 = \frac{{}^y d^3 z}{2.3}$, mithin $R = \frac{{}^y d^3 z}{6dy^3}$, u. s. w. Ferner $pdx = {}^x dz$, folglich $p = \frac{{}^x dz}{dx}$; $qdx^2 = \frac{{}^x ddz}{2}$, mithin $q = \frac{{}^x ddz}{2dx^2}$; $rdx^3 = \frac{{}^x d^3 z}{2.3}$, also $r = \frac{{}^x d^3 z}{6.dx^3}$, u. s. w. Endlich $\pi dydx = {}^y d\, {}^x dz$, folglich $\pi = \frac{1}{dy}.\frac{{}^y d\, {}^x dz}{dx} = \frac{{}^y dp}{dy}$; $\varkappa dy^2 dx = \frac{{}^y d^2 . {}^x dz}{2}$, folglich $\varkappa = \frac{1}{2dy^2}.\frac{{}^y d^2 . {}^x dz}{dx} = \frac{{}^y d^2 p}{2dy^2}$; $\varrho dy^3 . dx = \frac{{}^y d^3 . {}^x dz}{2.3}$, folglich $\varrho = \frac{1}{6dy^3}.\frac{{}^y d^3 . {}^x dz}{dx} = \frac{{}^y d^3 p}{2.3.dy^3}$, (im Buche steht falsch $\frac{{}^y d^3 p}{2.3.dy}$); $\pi' dydx^2 = \frac{{}^y d\, {}^x ddz}{2}$, also $\pi' = \frac{1}{dy}.\frac{{}^y d\, {}^x ddz}{2dx^2} = \frac{{}^y dq}{dy}$; $\varkappa' dy^2 dx^2 = \frac{{}^y d^2 . {}^x d^2 z}{2.2}$, also $\varkappa' = \frac{1}{2dy^2}.\frac{{}^y d^2 . {}^x d^2 z}{2dx^2} = \frac{{}^y ddq}{2dy^2}$; $\pi'' dydx^3$ (so muß man auf der 196. Seite, 5. Zeile lesen) muß $= \frac{{}^y d\, {}^x d^3 z}{2.3}$ seyn, also ist $\pi'' = \frac{1}{dy}.\frac{{}^y d\, {}^x d^3 z}{2.3.dx^3} = \frac{{}^y dr}{dy}$, (im Buche steht irrig $\pi'' = \frac{{}^y d\varrho}{dy}$).

Uebrigens brauche ich nicht erst zu erinnern, daß die obige Reihe in (III.) mit der letzten Reihe im Buche (nämlich 197. Seite, 5. Zeile) einerley sey.

Zu §. 117.

In dem Beweise verursachen zwar gleich Anfangs die beyden Sätze, $dy = Rm$ (20. fig.), und $dy = Pdx = Rt$, eine auffallende Zweydeutigkeit; vermuthlich aber war dieses der Gedanke des Herrn Verfassers:

$dy = Rm$ ist der vollständige Werth von dy, den man sucht, und den man auch durch die Reihe im 40. §. 2. Zusatz ausdrucken kann, wenn man dort $b = dx$ und $\beta = dy$ setzt; $dy = Pdx = Rt$ ist der unvollständige Werth von dy, den man als gegeben ansehen kann, und woraus man eben den vollständigen Werth sucht. Hat man einmal diesen letztern, und sieht man daraus, daß Q negativ seyn muß; so ist die Wahrheit des ersten Theils in dem Lehrsatze dargethan. Nun ist aber $Rm = Rt - tm$, oder $dy = Pdx - tm$, das heißt der vollständige Werth von dy, aus dem unvollständigen $= Rt = Pdx$ gefunden; in diesem vollständigen Werthe sieht man, daß $-tm$ negativ ist; also ist, vermöge (42. §. 3. Zus.), auch Q, folglich ddy negativ. Auf eben diese Art erhellet auch der zweyte Theil des Lehrsatzes.

Zu §. 121. No. 2.

„Also ebenfalls $FT : FM = GT : GM$."

Mit

Mit dieser Proportion hätte der Herr Verfasser den ganzen Beweis vortreflich endigen, und dabey bloß den 207. §. No. 2. seiner Geometrie citiren können. So aber hat er durch die folgenden fünf Zeilen, worin noch aus den Vergleichungen der Sinusse die Gleichheit der Winkel geschlossen wird, den Beweis leider nur unnütz überladen, und wirklich verdunkelt.

Zu §. 133.

Die folgende Einleitung des Beweises wird dem Anfänger hoffentlich willkommen seyn. Wenn der Conjugationswinkel $aCd = \phi + \psi = \beta$ heißt, so ist schon nach dem 126. §. in allen Fällen tang β $= \frac{\text{tang}\,\psi + \text{tang}\,\phi}{1 - \text{tang}\,\psi . \text{tang}\,\phi} = \frac{\gamma . \cot\phi + \text{tang}\,\phi}{1 - \gamma . \cot\phi . \text{tang}\,\phi}$, also I. tang $\beta = \frac{\text{tang}\,\phi + \gamma . \cot\phi}{1 - \gamma}$. Sind aber die beyden zusammengeordneten Durchmesser einander gleich, so ist $\psi = \phi$, und im 126. §. tang ϕ $= \gamma \cot\phi$, oder tang $\phi = \sqrt{\gamma} = \frac{b}{a}$; in (I.) wird also II. tang $\beta = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$. Wenn man nun in (I.) d. tang $\beta = 0$ setzt, und den daraus entstehenden Werth von tang $\phi = \sqrt{\gamma} = \frac{b}{a}$, selbst in tang β in (I.) setzt; so wird tang $\beta = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$ ein Kleinstes, wofern nur tang $\phi = \sqrt{\gamma}$ ein Kleinstes ist. Allein eben dieser Werth von tang β ist einerley mit dem in (II.), der dort für zwey zu-

sammengeordnete gleichgroße Durchmesser gehört. Also ist die Tangente des Conjugationswinkels, folglich der Conjugationswinkel für zwey gleichgroße zusammengeordnete Durchmesser ein Kleinstes. Daß aber selbst tang $\phi = \sqrt{\gamma}$ ein Kleinstes sey, wird nach dem 44. §. daraus erhellen, wenn man in dem für $\frac{dd\,\tang\beta}{d\phi^2}$ gefundenen Werthe, $\sqrt{\gamma}$ anstatt tang ϕ setzt, und alsdenn diesen Werth positiv findet; man braucht nämlich in dem 44. §. nur tang β anstatt y, und ϕ anstatt x zu setzen. Es ist aber $\frac{d.\,\tang\beta}{d\phi} = \sec\phi^2 - \gamma.\,\mathrm{cosec}\,\phi^2$, und $\frac{dd\,\tang\beta}{d\phi^2} = 2\sec\phi^2.\,\tang\phi + 2\gamma.\,\mathrm{cosec}\,\phi^2.\,\cot\phi$; setzt man hierin den Werth von tang $\phi = \sqrt{\gamma}$, so ist $\frac{dd\,\tang\beta}{d\phi^2} = 2(1+\gamma)\sqrt{\gamma} + 2\gamma.\,\frac{1+\gamma}{\gamma}.\,\frac{1}{\sqrt{\gamma}} = \frac{2(1+\gamma)^2}{\sqrt{\gamma}}$, welches offenbar positiv ist, weil hier von der Ellipse die Rede, folglich γ positiv ist.

Zu §. 142. 3. Zusatz.

„Indessen kann die gleichseitige Hyperbel „auch eben so gut jedes künstliche System vor„stellen," u. s. w.

Wahrscheinlich war folgendes der Gedanke des Herrn Verfassers: Die gleichseitige Hyperbel kann zwar auch jedes künstliche System vorstellen, das heißt, der Ausschnitt ACW oder das Trapezium

zium $ZAWV = hh . \log \frac{CV}{h}$, kann zwar den Logarithmen des Verhältnisses zwischen den Abscissen CV und h, in jedem künstlichen Systeme, dessen Modulus $= hh$ wäre, vorstellen; aber dieser Ausschnitt oder das Trapezium können doch offenbar nicht den künstlichen Logarithmen derjenigen Zahl vorstellen, welche die Länge von CV nach eben dem Maaßstabe ausdruckt, nach welchem man h angenommen: das heißt, weil bey der gleichseitigen Hyperbel, nur in dem natürlichen Systeme, hh mithin auch $h = 1$ seyn kann; so kann bey der gleichseitigen Hyperbel, in keinem künstlichen Systeme $ZAWV = hh . \log CV$ seyn. Z. B. sey $hh =$ dem Modulus des Briggischen Systems $= k = 0,43429 \ldots$ (57. §. 4. Zus.), so ist zwar $ZAWV = k . \log \frac{CV}{\sqrt{k}}$, der Briggische Logarithme des Verhältnißes $CV : \sqrt{k}$; aber doch wohl nicht der Briggische Logarithme von CV selbst, weil $\sqrt{k}$ nicht $= 1$ ist, auch nicht seyn kann; denn sonst müßte auch k, also der Modulus des Systems oder die Potenz der Hyperbel $= 1$ angenommen werden, und alsdann hören sicherlich alle künstlichen Logarithmen auf.

Zu §. 143. 3. Zusatz.

Das Integral $\int dx \sqrt{(xx - 1)}$ behandelt der Hr. Verfasser dergestalt daß er zuerst $dx \sqrt{(xx - 1)}$ in die beyden Theile $\frac{xxdx}{\sqrt{(xx-1)}}$ und $\frac{dx}{\sqrt{(xx-1)}}$ zerfällt, und alsdenn das Integral eines jeden Theiles

les sucht. Aber sowohl diese Zerfällung als selbst das Verfahren nach dem 87. §. ist hier überflüßig; denn nach dem 88. §. No. 1., hat man, für $m = 0$, gleich auf einmal $\int dx\, V(xx - 1) = \frac{1}{2}x\, V(xx - 1) - \frac{1}{2}.\int \frac{dx}{V(xx - 1)}$, wovon der zweyte Theil schon in dem 76. §. No. 1. gefunden ist.

Zu §. 143. 6. Zusatz.

„Nach den Grundsätzen der Integral„rechnung findet man“ u. s. w.

Auch hier ist wiederum des Herrn Verfassers Zerfällung und Verfahren nach dem 87. §. überflüßig; weil man alles gleich mit einem Male aus dem 88. §. No. 1., für $m = 0$, haben kann, nämlich $\int dx\, V(xx + 1) = \frac{1}{2}x\, V(xx + 1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{V(xx+1)}$, wovon der zweyte Theil schon im 76. §. No. 1. völlig da stehet.

Zu §. 143. 7. Zusatz.

„Die Integralrechnung giebt $\int dx\, V(2x + xx)$ „eben so.“

Man setze $x = z - 1$, so ist $dx\, V(2x + xx) = dz\, V(zz - 1)$, und nach (Anmerk. zu §. 143. 3. Zusatz) ist $\int dz\, V(zz - 1) = \frac{1}{2}z\, V(zz - 1) - \frac{1}{2}\log(z + V(zz - 1))$; oder wenn man den Werth von z wieder herstellt, $\int dx\, V(2x + xx) = \frac{1}{2}(x + 1).\, V(2x + xx) - \frac{1}{2}\log(x + 1 + V(2x + xx))$, folglich eben so.

Zu

Zu §. 144.

So allgemein, als der Herr Verfasser den Lehrsatz vorträgt, ist es nicht wahr, daß der Ausschnitt $ACM = \frac{1}{2} \log \frac{V(AD + At)}{V(AD - At)}$ sey: denn dieser Satz gilt bloß unter der Einschränkung, daß nämlich die Potenz der Hyperbel oder der Modulus $CX^2 . \sin \beta = \frac{1}{2}$, folglich $CX^2 . \frac{2ab}{a^2 + b^2} = \frac{1}{2}$, mithin $\frac{1}{2} ab = \frac{1}{2}$, oder $ab = 1$ sey, worin zugleich die gleichseitige Hyperbel als ein besonderer Fall enthalten ist; allgemein aber ist der Ausschnitt $ACM = \frac{1}{2} AC . AD \log \frac{V(AD + At)}{V(AD - At)}$. Dieses fällt selbst aus der Proportion $CT : CX = V(AD + At) : V(AD - At)$ zu Ende des Beweises, gleich in die Augen; denn nach dem 1. Zusatz des 142. §. ist der Ausschnitt $ACM = hh . \sin \beta . \log \frac{CT}{CX}$ folglich $= hh . \sin \beta . \log \frac{V(AD + At)}{V(AD - At)}$, und nach dem Zusatze des 138. §. ist $h = CX$, und $hh \sin \beta = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} AC . AD$.

Zu §. 146. Zusatz.

Das Integral $\frac{1}{2} b^4 . \int \frac{dr}{(a - f \cos r)^2}$ ist schon in der Anmerkung zu §. 102. 2. Zus. gefunden, wo ϕ, a, b mit den gegenwärtigen $r, a, -f$ einerley bedeuten. Es ist nämlich $\frac{1}{2} b^4 . \int \frac{dr}{(a - f \cos r)^2}$

 =

$$= \frac{ab^4}{(aa-ff)^{\frac{3}{2}}} . \text{Arc tang} \left(\text{tang} \tfrac{1}{2} \gamma . \sqrt{\frac{a+f}{a-f}} \right)$$

$$+ \frac{\frac{1}{2} b^4 f \sin \gamma}{(aa-ff)(a-f \cos \gamma)}$$

$$= \frac{ab^4}{(aa-ff)^{\frac{3}{2}}} . \text{Arc tang} \left(\text{tang} \tfrac{1}{2} \gamma . \sqrt{\frac{a+f}{a-f}} \right)$$

$$+ \frac{b^4 f . \text{tang} \frac{1}{2} \gamma}{(aa-ff)[a-f+(a+f) \text{tang} \frac{1}{2} \gamma^2]},$$

oder wenn man die Excentricität f durch die beyden Hauptdurchmesser a und b nach dem 8. §. 4. Zusatz ausdruckt, so ist dieses Integral $=$

$$ab . \text{Arc tang} \left[\frac{a}{b} (1 + \sqrt{\left(1 - \frac{bb}{aa}\right)} . \text{tang} \tfrac{1}{2} \gamma \right]$$

$$+ \frac{b^2 . \sqrt{\left(1 - \frac{bb}{aa}\right)} . \text{tang} \frac{1}{2} \gamma}{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{bb}{aa}\right)} + \left(1 + \sqrt{\left(1 - \frac{bb}{aa}\right)}\right) . \text{tang} \frac{1}{2} \gamma^2},$$

welches mit γ verschwindet.

Aus der Gleichung zwischen $AFM = \varphi$ und $FM = z$ (30. fig.) ist nunmehr auch der parabolische Sector AFM, nach der Anmerkung zu §. 102. 2. Zusatz, leicht gefunden. Es ist nämlich $z = \frac{\frac{1}{2} p}{1 + \cos \varphi} = \frac{2c}{1 + \cos \varphi}$ (12. §. 3. Zus.), folglich nach dem 69. §. $\frac{1}{2} zz d\varphi = \frac{\frac{1}{8} pp d\varphi}{(1 + \cos \varphi)^2}$ $= \frac{2 cc d\varphi}{(1 + \cos \varphi)^2}$, wovon das Integral $=$ $\frac{1}{16} p^2 . (\text{tang} \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{3} \text{tang} \frac{1}{2} \varphi^2) = cc . (\text{tang} \frac{1}{2} \varphi$ $+ \frac{1}{3} \text{tang} \frac{1}{2} \varphi^2)$ ist, welches mit φ verschwindet. Aus der Gleichung zwischen $AP = x$ und $PM = y$, findet man diesen Ausschnitt $AFM =$ parabol.

Drey-

Dreyeck $APM - \triangle MFP$ (145. §.) $= \frac{2}{3}xy - \frac{1}{2}y(x-c) = \frac{1}{2}y.(c + \frac{1}{3}x)$.

Zu §. 148. No. 3.

„So hat man $ds = \frac{adu\sqrt{(1-m^2u^2)}}{\sqrt{(1-uu)}}$. Bis„her sind weiter keine Mittel bekannt um die„ser Formul zum Zweck der Integration eine „bequemere Form zu geben."

Setzt man die rationale ganze Function $a(1-m^2u^2) = V$, so wird $ds = \frac{Vdu}{\sqrt{(1-(1+m^2)u^2+m^2u^4)}}$. In den Nov. Act. Acad. Imp. Petropol. Tom. V. P. II. 1781, stehet von Herrn Leonhard Euler Plenior Explicatio circa comparationem quantitatum in formula integrali $\int\frac{Zdz}{\sqrt{(1+mz^2+nz^4)}}$ contentarum, denotante Z functionem quamcunque rationalem ipsius Z, welches also einerley mit dem vorigen $\int ds$ wäre. Da aber bisher weder die Königl. Bibliothek, noch die Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin diesen Theil der Noua Acta besitzen soll: so mußte ich mich damit begnügen, auf diese wichtige Abhandlung nur zu verweisen; denn so viel ist doch immer zu vermuthen, daß einer Akademie zu Petersburg von einem Euler nicht bloß eine Integration dieses Differenzials durch Reihen, auch nicht bloß Reductionen auf elliptische oder etwa hyperbolische Bogen vorgelegt worden wären, weil doch die zuletzt ge-

nannten bisher nicht so wie die Kreisbogen bekannt sind.

Zu §. 148. No. 4.

„Für die Hyperbel erhält man $ds = \frac{dx \sqrt{((n+1)xx - aa)}}{\sqrt{(xx - aa)}}$."

Es ist auch $ds = \frac{dx \sqrt{(aa - (n+1)xx)}}{\sqrt{(aa - xx)}}$, setzt man hierin $\frac{x}{a} = u$, und die rationale ganze Function $a(1 - (n+1)uu) = V$, so wird $ds = \frac{V du}{\sqrt{(1-(n+2)uu+(n+1)u^4)}}$, welches sich mit dem in der Anmerkung zu §. 148. No. 3. erwähnten Eulerschen Integrale vergleichen läßt, nur daß hier $n+1 = \frac{aa+bb}{aa}$ ist.

Uebrigens ist im Buche von der fünften Zeile an auf der 252 Seite bis 253 Seite 7 Zeile, alles falsch, und muß so gelesen werden:

„Auch $\frac{ds}{\sqrt{(aa+bb)}} = \frac{udu}{\sqrt{(uu-1)}} + \frac{du(\sqrt{(1-m^2:u^2)}-1)}{\sqrt{(1-1:u^2)}}$. Der erste Theil dieses „Differenzials ist für sich integrabel, man findet $\int \frac{udu}{\sqrt{(uu-1)}} = \sqrt{(uu-1)}$. Für den „zweyten Theil wird die Rechnung eben so, „wie vorhin bey der Ellipse geführt: man „erhält $\frac{s}{\sqrt{(aa+bb)}} = \sqrt{\left(\frac{xx}{aa} - 1\right)} + A.\frac{a}{x}$ „$+ \frac{1}{3} B.\frac{a^3}{x^3} + \frac{1}{5} C.\frac{a^5}{x^5} + \frac{1}{7} D.\frac{a^7}{x^7} + \ldots + \text{Const.}$

„Es

„Es muß aber dieses Integral für die Hyper„bel = o seyn, wenn $x = a$ ist: also wird die „Constans = $- A - \frac{1}{3}B - \frac{1}{5}C - \frac{1}{7}D - \ldots$, „und die Reihe verwandelt sich in die folgende

„$\frac{s}{\sqrt{(aa+bb)}} = \sqrt{\left(\frac{xx}{aa} - 1\right)} - A\left(1 - \frac{a}{x}\right)$

„$- \frac{1}{3}B\left(1 - \frac{a^3}{x^3}\right) - \frac{1}{5}C.\left(1 - \frac{a^5}{x^5}\right)$

„$- \frac{1}{7}D\left(1 - \frac{a^7}{x^7}\right) - \ldots\ldots$ Je größer „x angenommen wird, desto schneller nehmen „die veränderlichen Theile der Glieder in die„ser Reihe ab. Wer also für eine Hyperbel „mehrere Bogen berechnen wollte, der würde „am vortheilhaftesten zuerst die beständige „Größe suchen, weil die Coefficienten A, $\frac{1}{3}B$, „$\frac{1}{5}C$, $\frac{1}{7}D \ldots$" u. s. w.

Zu §. 148. Zusatz.

Für die Ellipse und Hyperbel findet der Herr Verfasser aus der Gleichung (248. Seite, 5. Zeile) die Normallinie = $\frac{1}{2}\sqrt{(p^2 - 4p(n-1)x + 4n(n-1)xx)}$, wobey n für die Hyperbel das entgegengesetzte Zeichen bekommt; aber unmittelbar aus der Gleichung (249. Seite, 6. und 8. Zeile) folgt dafür ein mehr geschmeidiger Ausdruck, nämlich = $\sqrt{(naa - (1-n)nxx)}$; für die Hyperbel ist n negativ, also die Normallinie = $\sqrt{((1+n)nxx - naa)}$; und weil $n = \frac{bb}{aa}$, so

so ist für die Ellipse die Normallinie $= \frac{b}{a} \sqrt{\left(aa - \left(1 - \frac{bb}{aa}\right) xx\right)}$.

Zu §. 151. No. 5.

(263. Seite, 4. Zeile.)

„Dieses Integral muß $= 0$ seyn, wenn „$x = -a$ ist.“

Da man gleich Anfangs in No. 5. die Axe des Sphäroids mit dem zugeordneten Hauptdurchmesser der elliptischen Schnitte für einerley, das heißt A (12. fig.) für den Scheitel der halben zugeordneten Axe $AC = b$, auf dieser die Abscissen x aus dem Mittelpunct C, und eben deßwegen auch aus dem 3. Zusatz des 10. §. die Gleichung $yy = \frac{aa}{bb}(bb - xx)$ angenommen hat: so muß man nicht für $x = -a$, sondern für $x = -b$, das Integral $= 0$ setzen. Daher ist sowohl die Bestimmung der Constans im Buche, als auch alles übrige bis zu 264. Seite, 2. Zeile, ganz falsch; man muß also lesen:

„Dieses Integral muß $= 0$ seyn, wenn „$x = -b$ ist: also wird $C = + \frac{\pi ab}{k} \sqrt{(kk + bb)}$ „$- \pi ak \log \frac{-b + \sqrt{(kk + bb)}}{k}$, und das giebt „$S = \frac{\pi a}{k} (b \sqrt{(kk + bb)} + x \sqrt{(kk + xx)})$ „$+ \pi ak \log \frac{x + \sqrt{(kk + xx)}}{-b + \sqrt{(kk + bb)}}$, oder

„$S =$

$$„S = \pi a\left(b\sqrt{\left(1+\frac{bb}{kk}\right)} + x\sqrt{\left(1+\frac{xx}{kk}\right)}\right)$$

$$„ + \pi a k \log \frac{x + k\sqrt{(1 + xx : kk)}}{- b + k\sqrt{(1 + xx : kk)}}.$$ Setzt
„man hierin $x = b$, und stellt man den Werth
„von k wieder her, so erhält man die ganze
„Oberfläche des Sphäroids

$$„= 2\pi aa + \frac{\pi abb}{\sqrt{(aa - bb)}} . \log \frac{a + \sqrt{(aa - bb)}}{a - \sqrt{(aa - bb)}}$$

$$„= 2\pi aa + \frac{2\pi abb}{\sqrt{(aa - bb)}} . \log \frac{a + \sqrt{(aa - bb)}}{b}.$$

„Für ein Segment, das kleiner als die Hälfte
„des Sphäroids ist, muß man $- x$ anstatt $+ x$
„schreiben, und man erhält $S = \pi a\left[b\sqrt{\left(1+\frac{bb}{kk}\right)}\right.$

$$„\left. - x\sqrt{\left(1+\frac{xx}{kk}\right)}\right] + \pi a k \log \frac{k\sqrt{(1+xx : kk)} - x}{k\sqrt{(1+bb : kk)} - b}.$$

„Man wendet auch jene Formel auf die Kugel
„an, wenn man $a = b$ setzt: alsdenn wird $\frac{b}{k}$
„und $\frac{x}{k} = 0$, und die Gränze des zweyten Theils
„der Formel ist $\pi bk \log \frac{k+x}{k-b} = \pi bk \log \left(1 + \frac{b+x}{k-l}\right)$

$$„= \pi bk \left(\frac{b+x}{k-b} - \frac{1}{2}\frac{(b+x)^2}{(k-b)^2} + \ldots\right) \text{ (57. §.)}$$

„$= \pi b\ (b + x)$, also wird für die Kugel $S =$
„$2\pi b (b + x)$; und für Abschnitte, die kleiner als
„die Halbkugel sind, ist $S = 2\pi b\ (b - x)$."
(Durch den Halbmesser muß sich diese Kugel nothwendig von der in No. 4. unterscheiden.)

Zu

Zu §. 153.

(267. Seite, 2. Zeile.)

„Daraus findet man tang $ABQ = \frac{PQ.\sin\zeta}{PB - PQ.\cos\zeta} = \frac{\varepsilon\sin\zeta}{2 - \cos\zeta}$.“

Es ist $PQ = -\frac{1}{2}(\varepsilon.AP + \gamma)$, $PB = -\frac{\varepsilon x + \gamma}{\varepsilon} = -\frac{\varepsilon.AP + \gamma}{\varepsilon}$, und nach (Geometr. 453. §. 3. Auflös.) tang $ABQ = \frac{PQ.\sin\zeta}{PB - PQ.\cos\zeta}$ $= \frac{\sin\zeta}{\frac{PB}{PQ} - \cos\zeta} = \frac{\varepsilon.\sin\zeta}{2 - \varepsilon.\cos\zeta}$, aber nicht $= \frac{\varepsilon\sin\zeta}{2 - \cos\zeta}$; daher ist alles folgende bis zu Ende des Beweises nothwendig falsch, und muß folgendergestalt verbessert werden:

„Daraus findet man tang $ABQ = \frac{PQ.\sin\zeta}{PB - PQ.\cos\zeta} = \frac{\varepsilon.\sin\zeta}{2 - \varepsilon.\cos\zeta}$; durch AB und den Winkel ABQ ist alsdenn die Lage und Stelle des Durchmessers BQ gegeben. Man setze nun $AB = a$, die Winkel $ABQ = \eta$, $BQP = \vartheta$, so ist $\varepsilon = \frac{2}{\cos\zeta + \sin\zeta.\cot\eta}$, und $\gamma = -a.\varepsilon = -\frac{2a}{\cos\zeta + \sin\zeta.\cot\eta}$. Wird dieser Werth in der allgemeinen Gleichung gebraucht, so findet man $yy - \frac{2(a-x)}{\cos\zeta + \sin\zeta.\cot\eta}.y + \delta x^2 + \beta x + \alpha = 0$. Weil ε und ζ gegeben

„geben sind, so ist auch η, und eben darum zu„gleich $\vartheta = 180^\circ - (\zeta + \eta)$ gegeben, welches „der Winkel ist, unter welchem der Durchmesser „die ihm zugeordneten Sehnen halbiret. Dieser „Winkel ϑ wird $= 90^\circ$, wenn $\zeta + \eta = 90^\circ$, „also $\sin \zeta = \cos \eta$ und $\cos \zeta = \sin \eta$ ist. Das „giebt die Gleichung $\tang \eta = \frac{\varepsilon . \cos \eta}{2 - \varepsilon . \sin \eta}$, und „daraus folgt $2 \sin \eta - \varepsilon . \sin \eta^2 = \varepsilon \cos \eta^2$, also „$2 \sin \eta = \varepsilon (\cos \eta^2 + \sin \eta^2)$, mithin $\sin \eta = \frac{1}{2} \varepsilon$, „welches hier offenbar zwey Werthe für η, nämlich „sowohl η, als $180^\circ - \eta$ giebt. Wäre $\varepsilon = 0$, „so wird $\sin \eta = 0$ nur einen Werth für η bestim„men, und die Linie hätte doch wenigstens einen „Durchmesser, der seine Sehnen senkrecht hal„birte: er würde nun mit der Abscissenlinie *AB* „parallel seyn."

Zu §. 155.

Kegelschnitt kann in der höhern Geometrie entweder bloß den Schnitt eines Kegels; oder eine von den vier krummen Linien, Parabel, Hyperbel, Ellipse, Kreis, ohne Rücksicht auf den Körper dessen Schnitte sie seyn können; oder aber beides zugleich bedeuten. Der Lehrsatz im Buche: Jede Linie der zweyten Ordnung ist ein Kegelschnitt, kann also in der That drey gänzlich unterschiedene Lehrsätze angeben, nämlich I) jede Linie der zweyten Ordnung entsteht aus dem Schnitte eines Kegels mit einer Ebene; oder II) jede Linie der zweyten Ordnung ist entweder eine Parabel, oder Hyper-

bel, oder Ellipse, oder ein Kreis; oder III) jede Linie der zweyten Ordnung entsteht aus einem solchen Schnitte des Kegels, und ist eine von den vier erwähnten krummen Linien. Welchen von diesen drey Lehrsätzen meynte nun hier der Herr Verfasser? der doch sonst in seinem Lehrbegriffe alles haarklein zergliedert und auf die deutlichsten Begriffe zurückgebracht wissen will! der erste kann es nicht seyn, weil der Beweis im Buche dazu nicht passet, und weil er erst nach dem 213. §. folgen müßte, wo erwiesen wird, daß jeder Schnitt des schiefen Kegels mit einer Ebene, eine von den vier erwähnten krummen Linien sey; alsdann könnte dieser Satz allgemein sowohl für den graden (17. §.) als für den schiefen Kegel (213. §.) dargethan werden. Aus eben diesem Grunde meynt er auch den dritten Satz nicht; also muß es freylich der zweyte seyn; und hiemit stimmt auch im Beweise die Anführung des 16. §. 3. Zusatzes überein. Uebrigens ist die Conuersa eben dieses zweyten Satzes schon in dem Zusatze des 22. §. vorgekommen.

Zu §. 155. 3 Zusatz.

„Aus den oben vorgetragenen Lehren ist „schon bekannt, daß" rc. rc.

Wo oben? Etwa aus dem Zusatze des 136. §. Am besten aber aus dem 2. Zusatze des 265. §., der freylich sammt dem 266. §. mit vielem Nutzen schon zu Ende des zweyten Abschnittes gestanden hätte. Gleich im 160. §. No. 2. kommt wieder eine Stelle vor, die sich viel deut-

deutlicher und leichter aus dem 265 §. No. 2. als aus dem 113 §. 2 Zusatz herleiten läßt u. s. w.

Zu §. 156. 4 Zusatz.

„So liegt auch *O* in der Cissoide."

Der Durchschnittspunct von den verlängerten *AO* und *DB* sey irgendwo in *Z*: weil *PF*, *KO*, *BZ* parallel sind, so ist $AP : KB = AF : OZ$, folglich (3 Zus.) $AF = OZ$, und darum auch $AO = FZ$, also *O* in der Cissoide (156 §.).

Zu §. 157. 3. Zusatz.

Diese Verzeichnung ist sinnreich; nach des Herrn Autors Rechenkunst 192 §. findet man $a : \sqrt[3]{aab} = \sqrt[3]{abb} : b$, alles viel genauer und leichter.

Zu §. 157. 5. Zusatz.

Noch ist die Rectification der Cissoide übrig, wozu die Gleichung zwischen z und ϕ (157 §.) bequem seyn wird. Aus dem 52 §. No. 2. ist $ds = dz\,\sqrt{\left(1 + \frac{z^2\,d\phi^2}{dz^2}\right)}$; und aus der Gleichung $z = 2r \sin\phi \operatorname{tang}\phi$ folgt $dz = 2rd\phi \sin\phi . \frac{\cos\phi^2 + 1}{\cos\phi^2}$, $\frac{z^2\,d\phi^2}{dz^2} = \frac{\cos\phi^2 . \sin\phi^2}{(\cos\phi^2 + 1)^2}$, mithin $ds = \frac{2rd\phi \sin\phi}{\cos\phi^2} . \sqrt{((\cos\phi^2 + 1)^2 + \cos\phi^2 . \sin\phi^2)} = \frac{2rd\phi . \sin\phi}{\cos\phi^2} . \sqrt{(1 + 3\cos\phi^2)}$. Man setze

$\cos\varphi = \lambda$, so ist $\sin\varphi = \sqrt{(1 - \lambda\lambda)}$, $d\varphi = \frac{-d\lambda}{\sqrt{(1-\lambda\lambda)}}$, und $ds = \frac{-2r \,.\, d\lambda}{\lambda\lambda} \,.\, \sqrt{(1 + 3\lambda\lambda)}$, welches nach dem 88 §. 3 Zusatz leicht zu integriren ist; es ist nämlich

149 Seite, 5 und 6 Zeile

	m	p	b	a	n	x
hier	-2	$\frac{1}{2}$	1	3	2	λ

also $s = \frac{2r}{\lambda} \sqrt{(1 + 3\lambda\lambda)} - 6r \,.\, \int \frac{d\lambda}{\sqrt{(1+3\lambda\lambda)}}$, folglich nach der zweyten Formel des 77 §. $s = \frac{2r}{\lambda} \sqrt{(1 + 3\lambda\lambda)} - 3r\sqrt{3} \,.\, \log(\lambda\sqrt{3} + \sqrt{(1 + 3\lambda\lambda)}) + \text{Const.}$ Das Integral muß nun für $\varphi = 0$, also für $\lambda = 1 = \cos\varphi$, verschwinden, folglich ist Constans $= -4r + 3r\sqrt{3} \,.\, \log(\sqrt{3} + 2)$.

Zu §. 160. No. 2. und 3.

„Dem 113 §. 2 Zusatz gemäß, als eine „Function." ꝛc. ꝛc.

Im 113 §. 2 Zusatz ist freylich nicht der gegenwärtige Fall besonders erwähnt: wenn für gewisse Werthe von x und y, beides $P = 0$ und $p = 0$ gefunden wird. Ueberhaupt aber läßt sich für den gegenwärtigen Fall der Werth von $\frac{dt}{du} = \frac{0}{0}$ wirklich viel deutlicher und leichter aus dem 265 §. No. 2. als aus dem 113 §. 2 Zus. herleiten, man s. die Anmerkung zu §. 155. 3 Zus. Wenn nämlich $\frac{dt}{du} = y$ ist, so ist (280 Seite 4 Z.

von

von unten) $y = -\frac{2u^3 + 3au^2 + (a^2 - b^2 + t^2).u - ab^2}{uut}$; setzt man den Zähler hievon $= V$, den Nenner $= W$, so ist (265 §. No. 2.) $\frac{dV}{dW} = -\frac{6u^2du + 6audu - (a^2 - b^2 + t^2)du + 2utdt}{2tudu + u^2dt}$; für $t = 0$ und $u = -a$, wird $\frac{dV}{dW} = -\frac{(a^2 - b^2)du}{a^2dt}$ $= y$, oder $\frac{dt^2}{du^2} = \frac{b^2 - a^2}{a^2}$, also $\frac{dt}{du} = \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)}$, wie im Buche.

Zu §. 161. No. 2.

(284. Seite, 17. Zeile.)

„$zddz = (a \sec \gamma + b)\, ad\gamma^2 (\sec \gamma^3$
„$+ \tan \gamma^2 \sec \gamma)$.“

Die aus dem 159. §. zum Grunde gelegte Gleichung $z = a \sec \gamma \pm b$, giebt eigentlich $zddz = (a \sec \gamma \pm b)\, ad\gamma^2 (\sec \gamma^3 + \tan \gamma^2 \sec \gamma)$: wenn sich also der Herr Verfasser das Zeichen von b etwa bis zu Ende seiner Rechnung vorbehalten hätte, so hätte er es in der Gleichung (285. Seite, 8. Zeile) $2y^3 - 3a^2y - a^2b = 0$ auch wieder herstellen, folglich $2y^3 - 3a^2y \mp a^2b = 0$ setzen sollen. Aus dieser Gleichung folgen, für $b = a$ und zugleich für $z = y + b$, die drey im Buche angezeigten Wurzeln; aber für $b = a$ und zugleich für $z = y - b$, wird $2y^3 - 3a^2y + a^3 = 0 = (2y^2 + 2ay - a^2).(y - a)$, also die eine Wurzel $y = a$, und die beyden andern $y = \frac{1}{2}a.(-1 \pm \sqrt{3})$.

Zu §. 164.

In der Aufgabe selbst heißt es: „Man soll „prüfen, ob die Linie deren Natur die Glei„chung ausdruckt, unbestimmt fortlauffende „Aeste habe.“ Dieß ist doch wohl schon hinlänglich durch die drey Zusätze des 162. §. entschieden; hier aber meynt der Herr Verfasser eigentlich die Natur dieser Aeste im unendlichen Raume.

Zu §. 164. 2. Zusatz.

Am Ende heißt es: „Man findet die „Gränze des Werthes $zt = -\frac{\beta u^2 + \varepsilon u + \eta}{\alpha}$. „Weil das nun zuletzt ein beständiger Werth „wird, so verwandelt sich die Gleichung zu„letzt in eine Gleichung für die Hyperbel „(138. §.). Das will sagen: die krumme „Linie hat auch eine Hyperbel zur Asymtote.“

Die Gleichung $zt = -\frac{\beta u^2 + \varepsilon u + \eta}{\alpha}$ ist aus der Hauptgleichung so entstanden, daß man in dieser die Absciße $KR = t = \infty$ gesetzt hat; z bedeutet die verschwindende Ordinate MR, und $u = MR + RQ$ verwandelt sich dieser Voraussetzung gemäß, in die beständige Größe $RQ = BH = c = -\frac{\delta}{\alpha}$; also ist die Gleichung eigentlich diese $zt = -\frac{\beta c^2 + \varepsilon c + \eta}{\alpha}$, oder das Product $zt = KR \,.\, RM$ ist einer beständigen Größe gleich.

gleich. Dasselbe erhält man auch aus der letzten Gleichung im 137. §., $ut = uu \,.\, \sin(\beta + \gamma) : \sin\beta + \frac{1}{2}ab \,.\, \operatorname{cosec}\gamma$, welche sich für $t = \infty$, mithin für ein verschwindendes u, in die folgende verwandelt $ut = \frac{1}{2}ab \,.\, \operatorname{cosec}\gamma$, und die mit der im 138. §. übereinkommt; nur mit dem Unterschiede, daß die letztere den Ordinatenwinkel = dem Asymtotenwinkel setzt, und daher eben so gut für verschwindende als für ohne Ende wachsende Absciſsen gilt; da hingegen die erste aus dem 137. §. hergeleitete, wegen des willkührlichen Ordinatenwinkels γ, nur auf ohne Ende wachsende Absciſsen eingeschränkt ist. Da also, welches wohl zu merken, in der Gleichung $zt = -\frac{\beta c^2 + \varepsilon c + \nu}{\alpha}$, z die Ordinate MR, und t die ohne Ende wachsende Absciſse KR bedeuten: wie konnte der Herr Verfasser daraus schließen, „daß die krumme „Linie auch eine Hyperbel zur Asymtote habe"? Nein, diese Gleichung will offenbar nur so viel sagen: für ohne Ende wachsende Absciſsen ist der Ast dieser krummen Linie hyperbolisch. Vielleicht hat ihn bloß das Ansehn gewisser Geometer verführt, mit ihnen hier und in der Folge ohne fernere Prüfung gleich krummlinichte Asymtoten anzunehmen.

Zu §. 164. 3. Zusatz.

„Demnach ist die krummlinichte Asymtote „nicht allemal die zu den Kegelschnitten ge„hörige Hyperbel."

Aus der vorigen Anmerkung erhellet, wie ungegründet diese Folgerung sey. Man darf eigentlich nur dieses schließen: Demnach ist für ohne Ende wachsende Abscissen, der Ast dieser krummen Linie nicht allemal ein Ast der Apollonianischen Hyperbel.

Zu §. 166. 1. Zusatz.

„Demnach wird hiedurch zugleich eine „krummlinichte Asymtote angezeigt, die zur „Classe der Hyperbeln gehört."

Aus der Gleichung $z = \frac{A}{\alpha(c-d)t} + \frac{B}{\alpha(c-d)t^2} + \frac{C}{\alpha(c-d)t^3} + \ldots\ldots$, worin z die Ordinate MR (38. fig.), und t die ohne Ende wachsende Abscisse KR bedeutet, folgt offenbar nur dieses: je größer man die Abscissen t annimmt, desto mehr nähert sich der Ast der krummen Linie denjenigen Aesten, die zur Classe der Hyperbeln gehören (165. §.). Aber die krummlinichte Asymtote ist hier in der That aus der Luft gegriffen; man s. die Anmerk. zu §. 164. 2. Zus.

Zu §. 166. 2. Zusatz.

„Die krummlinichte Asymtote gehört also „wiederum zur Classe der Hyperbeln."

Wiederum krummlinichte Asymtoten!

Zu

Zu §. 167. 1. Auflösung.

„Oder kurz $\frac{u^3}{t^2}$ = Const. als eine Glei„chung für die krummlinichte Asymtote.“

Woher doch nur die krummlinichte Asymtote? Da dieß eine Gleichung selbst für den Ast der krummen Linie ist, wobey ohne Ende wachsende Abscissen vorausgesetzt werden.

Zu §. 167. 2. Auflösung.

„In den Fällen litt. *b*, *c*, findet man eine „krummlinichte Asymtote, die mit der Parabel „übereinkommt; in dem Falle litt. *d*. findet „man eine Gleichung von der Form $\frac{u^3}{t}$ = „Const. für eine krummlinichte Asymtote.“

Unstreitig muß dieß so gelesen werden: In den Fällen litt. *b*, *c*, findet man, für ohne Ende wachsende Abscissen, einen Ast, der mit der Parabel übereinkommt; in dem Falle litt. *d*. findet man eine Gleichung von der Form $\frac{u^3}{t}$ = Const. für den Ast im unendlichen Raume.

Zu §. 168.

„Breitet sich diese parabolische Linie.“

Der Herr Verfasser sollte sie eigentlich nur eine Parabel der höhern Ordnung nennen; weil selbst nach seinem Geständniß (176. §.), un-

ter parabolischen Linien ganz andere verstanden werden.

Zu §. 169.

„Die krummlinichten Asymtoten der algebraischen Linien haben entweder die Natur „einer hyperbolischen oder einer parabolischen „Linie (165 — 167. §.)."

Aus den angeführten Paragraphen (Anmerk. zu 164 — 167. §.) erhellet, daß man anstatt dessen lesen muß: die krummlinichten Aeste im unendlichen Raume oder für ohne Ende wachsende Abscissen, der algebraischen Linien, haben entweder die Natur einer hyperbolischen oder einer parabolischen Linie.

„Theils von der Natur ihrer krummlinich„ten Aeste hergenommen."

Eigentlich doch nur von der Natur dieser krummlinichten Aeste im unendlichen Raume, hergenommen.

Zu §. 171.

Nach den Worten: „Demnach ist die ge„suchte Gleichung $= -\frac{1}{n}(ax+b)$," muß man selbst der Aufgabe gemäß folgendes hinzusetzen:

Ferner sey der Durchschnittspunct von AB und CD irgendwo in F, so ist für $x = AF$, $u = 0 = -\frac{1}{n}.(a.AF+b)$, also $AF = -\frac{b}{a}$,

und

und tang $PFQ = \frac{PQ}{PF} = \frac{u}{AF - x} = \frac{1}{n} \cdot a$, folglich durch diese Werthe von AF und PFQ die Lage des Durchmessers vollkommen bestimmt. Hier habe ich $APM = 90°$ angenommen; wenn aber $APM = \zeta$ ist, also ζ durch die Gleichung zwischen y und x gegeben, so ist tang $AFQ = \frac{a \cdot \sin\zeta}{n - a \cdot \cos\zeta}$, man s. 153. §.

Zu §. 176. 2. Zusatz.

„Also ist zugleich die Parabel, welche mit „der Gleichung $y = ax^n$ zusammen gehört, „ihre krummlinichte Asymtote."

Woher wieder die krummlinichte Asymtote; da doch die Parabel, welche mit der Gleichung $y = ax^n$ zusammen gehört, und wobey ohne Ende wachsende Abscissen vorausgesetzt werden, offenbar nur selbst der Ast jener parabolischen Linie ist?

Zu §. 179.

In diesem Abschnitte handelt der Herr Verfasser von transcendenten Linien. Was der Leser allgemein unter diesem Titel zu verstehen habe, ist freylich nirgend im Buche angezeigt; indeß läßt sich doch die Bedeutung davon zur Noth (man s. die Anmerk. zu §. 207. und zu §. 208. 2. Zus.) aus dem 45. §. errathen, wo transcendente Functionen erwähnt sind.

Zu §. 179. 4. Zusatz.

„Und man findet die Fläche $APMB =$ „$mb\,(y - a)$."

Setzt man $y = 0$, so giebt die beständige Größe $- amb$ den ganzen Flächenraum, der zwischen AB, dem ohne Ende wachsenden Aste BN und der Asymtote AE enthalten ist. Denn aus der Gleichung im 179. §. folgt $y = a e^{x:mb}$, und $\int y dx = amb e^{x:mb} + \text{Const}$, wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet; setzt man hierin x negativ, z. B. $= AQ$, so ist $\int y dx = \frac{amb}{e^{x:mb}} + \text{Const}$. Da dieß Integral mit x verschwinden muß, so ist Const $= - amb$, und die Fläche $ABNQ = amb \,.\left(\frac{1}{e^{x:mb}} - 1\right)$; für $-x = \infty$, bekommt man also die Anfangs erwähnte Fläche $- amb$, wobey das Zeichen $(-)$ nur die Lage anzeigt.

Zu §. 180. 7. Zusatz.

„Und im Dreyecke CTM hat man sin „$(CMT + \gamma) : CM = \sin CMT : CT$."

Diese Proportion ist falsch; denn es ist in keinem Falle $\sin CTM = \sin(CMT + \gamma)$: daher sind die folgenden drey Zeilen, so wie überhaupt der ganze Zusatz auszustreichen. Eigentlich ist $CT = z \,.\, \text{tang}\, CMT = \frac{z\gamma}{1 - \gamma \,.\, \cot\gamma}$, man vergleiche hiemit den 53. §.

Zu §. 184. 4. Zusatz.

„Und $CT = -\frac{(\alpha+\gamma)^2 \cdot zz}{a\alpha}$, da dann das „Zeichen — nur die Lage anzeigt."

Nach Anmerk. zu §. 53., ist tang CMT (55. fig.) nicht $= \frac{zd\gamma}{dz}$, sondern $= \frac{-zd\gamma}{dz} = \frac{(\alpha+\gamma)^2 z}{a\alpha}$, und $CT = \frac{(\alpha+\gamma)^2 zz}{a\alpha}$; mithin sind die Worte: „Da dann das Zeichen — nur die Lage an„zeigt," auszustreichen.

„Demnach ist die Subtangente allemal „dem Bogen BA gleich."

Nur die hyperbolische Spirallinie allein hat eine unveränderliche Subtangente. Denn es sey (53. §.) $\frac{-zzd\gamma}{dz} = B$, so ist $\frac{-dz}{zz} = \frac{d\gamma}{B}$, und $\frac{1}{z} = \frac{\gamma}{B}$, oder $z = \frac{B}{\gamma}$, welche Gleichung mit der im 1. Zusatz des 184. §. übereinstimmt, weil man γ auch $= BCD$ setzen konnte.

Zu §. 184. 5. Zusatz.

„Aus tang $CMT = -\frac{(\alpha+\gamma)^2 z}{a\alpha}$."

Sollte heissen: „Aus tang $CMT = \frac{(\alpha+\gamma)^2 z}{a\alpha}$."
Man sehe die nächst vorhergehende Anmerkung. Hiemit stimmt auch die übrige Rechnung dieses Zusatzes überein.

Zu §. 184. 8. Zusatz.

„Um auch den Zähler rational zu machen sey $\psi = \lambda^2$."

Dieß ist bereits die dritte Transformation, die sich der Herr Verfasser hätte ersparen können, wenn er in der zweyten Zeile auf der 339 Seite, $1 + \zeta^2$ nicht $= \zeta^2 . \psi$, sondern $= \zeta^2 \psi^2$ gesetzt hätte, alsdann hätte er gleich das rationale Differenzial $ds = - a\alpha \frac{\psi^2 d\psi}{\psi^2 - 1}$ erhalten. Aber selbst diese, so wie überhaupt alle die schleppenden Transformationen von der ersten Zeile an (339 Seite) sind unnütz, da das Integral von $ds = \frac{a\alpha d\zeta}{\zeta^2} . \sqrt{(1 + \zeta^2)}$ unmittelbar durch den dritten Zusatz des 88. §. gegeben ist. Setzt man nämlich dort $m = - 2$, $n = 2$, $p = \frac{1}{2}$, $a = 1 = b$; so ist $s = \text{Const} - \frac{a\alpha\sqrt{(1+\zeta^2)}}{\zeta}$ $+ a\alpha \int \frac{d\zeta}{\sqrt{(1+\zeta^2)}} = \text{Const} - \frac{a\alpha\sqrt{(1+\zeta^2)}}{\zeta}$ $+ a\alpha . \log(\zeta + \sqrt{(1 + \zeta^2)})$, (76. §. No 1.), $= \text{Const} - \frac{a\alpha\sqrt{(1+(\alpha+\gamma)^2)}}{\alpha+\gamma} + a\alpha \log[\alpha + \gamma$ $+ \sqrt{(1 + (\alpha+\gamma)^2)}]$. Für $\gamma = 0$, ist $\text{Const} = a\sqrt{(1+\alpha^2)} - a\alpha . \log(\alpha + \sqrt{(1+\alpha^2)})$, also $s = a\sqrt{(1 + \alpha^2)} - \frac{a\alpha\sqrt{(1+(\alpha+\gamma)^2)}}{\alpha+\gamma}$ $+ a\alpha \log \frac{\alpha+\gamma+\sqrt{(1+(\alpha+\gamma)^2)}}{\alpha+\sqrt{(1+\alpha^2)}}$, welches mit dem Integrale im Buche vollkommen einerley ist.

Am Ende sagt der Herr Verfasser, daß die Constans zugleich die Gränze des Werthes sey, dem sich s desto mehr nähert, je größer γ angenommen wird. Das ist aber offenbar falsch, denn selbst in seinem Integrale ist, für $\gamma = \infty$, ψ nicht $= 0$ sondern $= 1$, und eben so λ nicht $= 0$ sondern $= 1$, also auch s nicht = Constans sondern = Const + ∞; folglich der Bogen, der sich durch unzählige Windungen dem Pole nähert, selbst unendlich. Daß dieser aber allgemein keiner beständigen Größe gleich seyn kann, erhellet auch schon ohne alle Rechnung aus der einzigen Frage: welches ist die erste dieser unzähligen Windungen? und wenn einige Windungen rückwärts dazu kommen, die bekanntlich immer länger werden, sollte wohl die beständige Größe dadurch nicht geändert werden?

Zu §. 185. 5. Zusatz.

„Oder $ds = \frac{dz}{aa} \sqrt{(a^4 + r^2 z^2 - 2rz^3 + z^4)}$.
„Das Integral hievon läßt sich ohne Auflö„sung des Differenzials in eine Reihe nicht al„gebraisch angeben."

Man setze hierin $z = x + \frac{1}{2} r$, so wird $ds = \frac{dx}{aa} \sqrt{(x^4 - \frac{1}{2} rx^2 + \frac{1}{16} r^4 + a^4)}$; setzt man ferner $\frac{1}{16} r^4 + a^4 = b^4$, so ist $ds = \frac{dx}{a^2 b^2} \sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{2b^4} xx + \frac{1}{b^4} . x^4\right)}$; setzt man endlich die rationale ganze Function $\left(1 - \frac{r^2}{2b^4} xx\right.$

+

$+ \frac{1}{b^4} x^4) : a^2 b^2 = X$, so wird $ds = \frac{X dx}{\sqrt{\left(1 - \frac{r^2}{2b^4} xx + \frac{1}{b^4} x^4\right)}}$, welches auf dem oben in Anmerk. zu §. 148. No. 3. erwähnten Integrale von $\frac{Z dz}{\sqrt{(1 + mz^2 + nz^4)}}$ beruhet.

Zu §. 185. 6. Zusatz.

Aus der Gleichung im 185. §. folgt nach Anmerk. zu §. 69., $d . AMP = \frac{2ry - yy}{2r} . dw = \frac{p}{rr} . \frac{2ry - yy}{2r} . 2ydy = \frac{2\pi}{rr} . (2ry^2 - y^3) dy$; also $AMP = \frac{2\pi}{rr} . (\frac{2}{3} ry^3 - \frac{1}{4} y^4)$. Für $y = r$, ist die Fläche $= \frac{5}{6} \pi rr$, wie gehörig.

Zu §. 187. 1. Zusatz.

„Und nehme für α einen Bogen an, der „seinem Halbmesser gleich ist."

Also den Bogen $\frac{180°}{\pi} = 57° 17' 44'' 48'''$.

Zu §. 187. 2. Zusatz.

„Woraus $\frac{z dr}{dz} = m$ gefunden wird."

Für

Für $CMT = 45°$, ist also $m = 1$, und die Zahl y oder eigentlich $\frac{\pi \cdot y^{\circ}}{180^{\circ}} = \log nat \frac{z}{a}$ giebt natürliche Logarithmen.

Zu §. 187. 3. Zusatz.

„Sucht man aber die ganze Länge der „Spirallinie, so wie sie" rc. rc.

Diese Art den Bogen für die unzähligen Windungen zu finden, wird dem Anfänger in mancher Rücksicht dunkel vorkommen. Das deutlichste Verfahren bleibt wohl dieses: Wenn man die im 7 Zus. bewiesene Eigenschaft der logarithmischen Spirallinie zum Grunde legt, so erhält man die Gleichung $y = \log nat . z$, so genommen, daß y mit z verschwindet, folglich den Bogen nunmehr vom Pole an, und nicht wie im 1. Zusatz von A an gerechnet. Diese Gleichung giebt $dy = \frac{m dz}{z}$, und $ds = dz \sqrt{\left(1 + \frac{z^2 dy^2}{dz^2}\right)} = dz \sqrt{(1 + mm)}$, oder $s = z \sqrt{(1 + mm)}$, so genommen daß der Spiralbogen mit z verschwindet; und das stimmt mit dem Resultate im 3. Zusatz überein.

Zu §. 188.

„In dem Falle wenn $\psi = 45°$ ist, wird „die Evolute der durch die Abwickelung er„zeugten gleich und ähnlich."

Alsdenn nämlich ist $m = \text{tang} \psi = 1$, (man s. Anmerk. zu §. 187. 2. Zus.), folglich im

1. Zu-

1. Zusatz des 187. §., $y = \log nat(z : a)$, und hier $\zeta = \log nat(x : a)$.

Zu §. 188. 3. Zusatz.

„Alsdenn ist jeder Bogen der Evolute „*AD* dem durch seine Abwickelung erzeugten „*AM* ähnlich."

Und beide haben, welches wohl zu merken ist, eine übereinstimmige Lage.

Zu §. 194. 3. Zusatz.

„Wegen der Abwickelung ist zugleich „$\frac{ds}{r} = \frac{dS}{R}$."

Diese Gleichung setzt offenbar voraus, daß an den beiden Stellen *M* und *L*, folglich auch bey *D* und *O*, der Krümmungswinkel $d\varphi$ immer gleich bleibe (111. §. 5. Zusatz). Da nun dieß so allgemein bloß bey der Abwickelung des Kreises statt findet: so erhellet, daß *L* und *M* unendlich nahe an *K*, oder selbst sowohl *s* als *S* nur als verschwindende Bogen angenommen werden müssen. — Der ganze Vortrag ist hier so mangelhaft, daß einem alle Lust ihn zu erläutern vergeht; zumal da man diese Lehre in Herrn Eulers Inuestigatio curuarum, quæ euolutæ sui similes producunt, Comment. Petropol. Tom. XII. 1750, am deutlichsten und gründlichsten vorgetragen findet.

Zu §. 194. 5. Zusatz.

„Im 192. §. aber wird $\frac{dx}{dy}$ = tang PMT „ = $\frac{\sqrt{(2ax - xx)}}{2a - x}$ = 1, also $PMT = 45°$" ꝛc.

In der 71 Fig. ziehe man an K eine Tangente, wovon AB in T geschnitten werde, und von K fälle man auf AB das Loth Kp; alsdann wird die angeführte Stelle so lauten: Im „192. §. aber wird $\frac{dx}{dy}$ = tang pKT = „ $\frac{\sqrt{(2ax - xx)}}{2a - x}$ = 1, also $pKT = 45°$ u. s. w." In allen Fällen aber wird hier $KNA = pKT$, das heißt, nach Anmerk. zu §. 105. No. 1., AB auf die Tangente in A senkrecht, und zwar dem 192. §. 1. Zusatz gemäß angenommen.

Nach den letzten Worten „die ihr in umgekehrter Lage ähnlich ist" setze man hinzu: dabey aber auch, wegen $n = 1$, vollkommen gleich ist.

Zu §. 196.

(368. Seite, 16. Zeile.)

„So ist $AZD = \frac{u}{\varrho}$."

Eigentlich ist $AZD = \frac{u}{\varrho} \cdot \frac{180°}{\pi}$; hier aber wird der Winkel $\frac{180°}{\pi}$, oder das α in der Anmer-

kung zu §. 187. 1. Zusatz, für die Einheit der folgenden Winkel angenommen.

Zu §. 198. 3. Zusatz.

„Die Amplitude AM ist $= PMT$," ꝛc. ꝛc. Nach Anmerkung zu §. 105. No. 1., ist dieses nur alsdann wahr, wenn AZ auf die Tangente in A senkrecht ist. Daß aber dieses hier wirklich statt findet, erhellet aus (373. Seite, 4. Zeile.) $\sec ZMT = \frac{-\zeta}{e \sin \frac{1}{2} \delta}$, wo in A, $\delta = 0$, folglich die Secante unendlich ist.

Zu §. 200.
(379. Seite, 13. Zeile.)

„Man ziehe DO, so ist $KDO = 90°$ und „DO die Tangente."

Man beschreibe einen mit BKE concentrischen Kreisbogen AOF, welcher den Kreis KDO in O berührt, und ziehe DO, so ist $KDO = 90°$ und DO die Tangente; weil nach (373. Seite, 9. Zeile von unten), die Tangente auf der Sehne KD (dort MQ) senkrecht steht.

Zu §. 200. 2. Zusatz.

„Nur ist die Stellung der einen der Stel„lung der andern entgegengesetzt."

Woher dieß? Alles wird ganz klar, wenn man am Ende des 200. §. nach den Worten: „Des-

„Dessen Halbmesser $= n\varrho = \varrho + 2r$ ist," folgendes hinzusetzt: und wenn ihre Abscissen w senkrecht auf ihren Hauptdurchmesser sind, und von ihrer Spitze an gerechnet werden (196. §. 3. Zusatz): also ist GZ ihr Hauptdurchmesser, G ihr Scheitel, und A ihre Spitze; folglich ihre Stellung der Stellung der abgewickelten Epicycloide entgegengesetzt.

Zu §. 201. Zusatz.

„Nicht allein eine ähnliche krumme Linie „wird, sondern auch eine mit der vorigen über„einstimmige Lage erhält."

Für $n = 1$, werden beyde auch noch dazu einander vollkommen gleich, man s. die Anmerkung zu §. 188.

Zu §. 203. 2. Zusatz.

„Aus der Gleichung $\frac{yds}{-dy} = a$."

Das negative Zeichen steht freylich nicht in der Auflösung des 203. §., wo es für die zweyte Potenz ganz gleichgiltig gewesen wäre; überhaupt ist es auch nicht unmittelbar durch die Rechnung selbst gegeben: man nimmt es aber darum an, weil s wachsen soll, wenn y abnimmt.

Zu §. 205.

„So ist jeder andere Werth $\tan\varphi = \frac{dx}{dy}$."

Da φ hier ausdrücklich die Amplitude des Bogens *CM* bedeuten soll, und nach dem 46. §. $\frac{dx}{dy}$ = tang *PMT* ist: so setzt der Herr Verfasser dadurch, daß er $\varphi = PMT$ annimmt, offenbar auch dieß voraus, daß die Abscissenlinie *BC* auf die Tangente in *C* senkrecht seyn soll, man s. die Anmerkung zu §. 105. No. 1.; welches also mit zu den Bedingungen der Aufgabe gezogen werden muß.

Zu §. 207.

„Daraus folgt $dx = \frac{(b^2 + y^2)\,dy}{\sqrt{(a^4 - (b^2 + y^2)^2)}}$.
„Das Integral hievon läßt sich aber weder „durch Logarithmen noch durch Kreisbogen „ausdrücken."

Warum zählt denn also der Herr Verfasser diese Linie unter die transcendenten? (Anmerk. zu §. 179.) Setzt man übrigens $a^4 - b^4 = f^2$, und die rationale ganze Function $\frac{b^2 + y^2}{f} = Y$; so ist $dx = \frac{Ydy}{\sqrt{\left(1 - \frac{2b^2}{f^2} \cdot y^2 - \frac{1}{f^2} \cdot y^4\right)}}$, welches also bloß auf die oben (Anmerk. zu §. 148. No. 3.) erwähnte Integration von $\frac{Zdz}{\sqrt{(1 + mz^2 + nz^4)}}$ ankäme.

Zu §. 208. 2. Zusatz.

„Obgleich y eine transcendente Function „von x ist.“

Wie so? man s. Anmerk. zu §. 207. und zu §. 179.

„So wird die Fläche $ABC = V(a^4 - b^4) - ab$.“

Das ist falsch; denn alsdann wird diese Fläche $= \frac{1}{2} V(a^4 - b^4) - \frac{1}{2} V(-b^4 - 2b^2 a^2)$, also unmöglich, wenn nicht $b = 0$ ist; folglich ist auch $y = a$ unmöglich, wenn nicht $b = 0$ ist, welches damit im 208. §. übereinstimmt, daß die Figur der elastischen Linie von der Bestimmung der Größen a^2 und b^2 abhängt.

Zu §. 212.

Wenn man für die krumme Fläche eine Gleichung zwischen drey rechtwinklichen Coordinaten x, y und z hat; wenn überdieß die schneidende Ebene senkrecht auf die Abscissenebene, und der Schnitt beyder Ebenen entweder mit x in einer Entfernung $= h$, oder mit y in einer Entfernung $= f$, parallel ist; so ist die Auflösung der Aufgabe im 212 §. ungemein einfach. Man braucht nämlich in der Gleichung für die krumme Fläche nur $y = h$ zu setzen, wenn die schneidende Ebene mit x parallel läuft; und wenn sie mit y parallel ist, nur $x = f$ zu setzen, um für die Durchschnittsfigur im ersten Falle eine Gleichung zwischen x und z, und im zweyten Fall eine zwischen y und z zu erhalten. Der Nutzen hievon wird sich bald

im 217. §., im 224. §. 1. und 2. Zusatz rc. rc. zeigen.

Zu §. 212. Zusatz.

Dieser ganze Zusatz, die letzten vier Zeilen ausgenommen, ist bloß eine Ausführung der Auflösung im 212. §. In den letzten vier Zeilen aber wird eigentlich eine zweyte Auflösung mitgetheilt. Daß aber beyde Auflösungen einerley Resultat geben müssen, ließe sich so beweisen:

Sowohl die Gleichung für irgend eine krumme Fläche, als auch die allgemeine Gleichung für die schneidende Ebene $z = (a + x) . \sin \eta . \tang \vartheta + y \cos \eta . \tang \vartheta$ oder $z = (f \cot \eta + x) . \sin \eta \tang \vartheta + y \cos \eta . \tang \vartheta$, ist eine Function von z, x und y, wenn man jede auf 0 bringt. Nach dem 212. §. soll man den Werth von z aus der Gleichung für die schneidende Ebene in die Gleichung für die krumme Fläche setzen, um eine Gleichung zwischen x und y allein, für die Projection der Durchschnittsfigur zu bekommen. Wenn man ferner in diese zuletzt erwähnte Gleichung den Werth von $x = t . \cos \eta + u \sin \eta \cos \vartheta$, und den Werth von $y = u \cos \eta \cos \vartheta - t \sin \eta - f$ setzet, so erhält man offenbar eine Gleichung zwischen t und u, für den projicirten Schnitt, das heißt für die Durchschnittsfigur selbst. Ich will indessen den Werth von z für die schneidende Ebene, nachdem in demselben die erwähnten Werthe von x und y substituirt worden sind, Z nennen, und die gedachten Werthe von x und y sollen X und Y heißen. Also enthält die bisher

nach dem 212. §. erhaltene Gleichung für die Durchschnittsfigur, eben dieselben Potenzen von Z, X und Y, welche von z, x und y in der Gleichung für die krumme Fläche selbst vorkommen. Es ist aber Z, wie die ganz leichte Substitution selbst zeiget, $= u \sin \vartheta$; folglich erhält man dieselbe Gleichung für die Durchschnittsfigur, wenn man grade in die Gleichung für die krumme Fläche, $u \sin \vartheta$, X und Y, anstatt z, x und y setzt. Weil nun dieß letzte Verfahren eben die Vorschrift in den letzten vier Zeilen des gegenwärtigen Zusatzes ist, wo der Herr Verfasser bloß aus Betrachtung der Figur, $z = u \sin \vartheta$ findet: so erhellet, daß diese Vorschrift mit der Auflösung im 212. §. einerley geben, folglich durch sie zugleich erwiesen seyn muß.

Zu §. 213. 4. Zusatz.

„Und weil das *m* in der vorigen Bedeu„tung nicht weiter gebraucht wird, so sey „nun." ꝛc. ꝛc.

Dieses Versprechen hat der Herr Verfasser gleich schon im 215. §. vergessen, wo *m* grade in dieser vorigen Bedeutung beständig vorkommt, und wo man also, wenigstens dem gegenwärtigen Zusatz gemäß, überall $\frac{a}{b}$ anstatt *m* setzen müßte. Das ist aber nicht genug; im 216. §. bekommt wiederum *a* unnöthig eine ganz andere Bedeutung; daß dem Leser, wenn er das Buch nur auf eine mäßige Zeit aus den Händen gelassen, nach-

her die nöthige Vergleichung dieser Formeln heillos erschwert wird.

Ganz am Ende dieses Zusatzes setze man folgendes hinzu: Für den Cylinderschnitt ist $n = 0$, weil $b = \infty$ ist; für ihn ist also $tt + m^2u^2 - 2mfu + ff - aa = 0$.

Zu §. 215.

„Mithin ist $GE - GL = 2f \sin \eta$, oder „$f \sin \eta = \frac{1}{2} (GE - GL)$, und überdem ist „$DL = DE$. Demnach ist ferner $GE + GL$ „$= 2DL$, oder $DL = \frac{1}{2} (GE + GL)$, mithin „$GE = DL + f \sin \eta$, $GL = DL - f \sin \eta$, „und das giebt $GD = GE - DE = GE - DL$ „$= f \sin \eta$."

Dieser Beweis, daß $GD = f \sin \eta$ sey, ist doch auch gar zu gelehrt! Ist denn nicht $AG = f$, $GAD = \eta$, also $DG = f \sin \eta$?

Zu §. 216. No. 5.

(Zu Ende.)

„Und $\frac{2qq}{p} = \frac{2r(E-g)}{L}$, als den Parameter, der auch für den Fall, wenn der „Schnitt eine Parabel ist, mit dem Durchmesser ZC zusammengehört."

Zu unbestimmt! Ueberhaupt muß die Rechnung für die Parabel so eingeleitet werden: Nach der allgemeinen Gleichung der zweyten Ordnung $y^2 + \epsilon xy + \delta x^2 + \gamma y + \beta x + \alpha = 0$, muß für

für die Parabel $\delta - \frac{1}{4}\epsilon = 0$ seyn. Weil nun in der Gleichung für jeden Schnitt des schiefen Kegels (No. 4.) $yy + \frac{E^2 - rr}{L^2} xx + \frac{2(rr - Eg)x}{L} + gg - rr = 0$, $\delta = \frac{E^2 - rr}{L^2}$ und $\epsilon = 0$ ist: so muß für die Parabel $\frac{E^2 - rr}{L^2} = 0$, mithin $E = r$ seyn. Für die Parabel ist also diese Gleichung I. $yy + \frac{2r(r-g)}{L} x + gg - rr = 0$. Um hieraus eine Gleichung für solche Abscissen zu bekommen, die zwar auf dem Durchmesser DZ bleiben, aber von dessen Scheitelpunct Z an gerechnet werden, setze man zuvor $y = 0$, so erhält man (16. fig.) $DZ = x = \frac{rr - gg}{2r(r-g)} \cdot L = \frac{r+g}{2r} L$. Ferner setze man $ZP = w$, so ist $DP = x = DZ - w = \frac{(r+g)L}{2r} - w$; dieser Werth von x in die Gleichung (I.) gesetzt, giebt $yy - \frac{2r(r-g)}{L} w = 0$, oder $yy = \frac{2r(r-g)}{L} w$, mithin den Parameter der Parabel $= \frac{2r(r-g)}{L}$.

Weil man also weiß, daß für die Parabel $E = r$ ist, so kann man auch daraus die Bedingungen, worunter der Schnitt des schiefen Kegels eine Parabel wird, näher bestimmen. Es ist nämlich nach No. 4., $E = D \operatorname{cosec} \vartheta + g$, und in No. 3., $D = b \sin\alpha \cos\vartheta + b \cos\alpha \cos\eta \sin\vartheta - g \sin\vartheta$, folglich $E \sin\vartheta = b \sin\alpha \cos\vartheta$ +

$+ b \cos\alpha \cos\eta \sin\vartheta$, und $E = r = b \sin\alpha \cot\vartheta + b \cos\alpha \cos\eta$. In der Gleichung $\frac{r}{b} = \sin\alpha \cot\vartheta + \cos\alpha \cos\eta$ sind also die erwähnten Bedingungen gänzlich enthalten, woben zugleich merkwürdig ist, daß selbst das Verhältniß $b : r$ oder der Axe des schiefen Kegels zum Halbmesser seiner Grundfläche, einen Einfluß in die Bestimmungen der Winkel ϑ, η und α hat.

Zu §. 217.

(421. Seite, 4. Zeile von unten.)

„So hat man für diesen Schnitt die Glei„chung $dz = Pdx$."

In ihr ist also y der Abstand zwischen den beyden Abscissenlinien AG und SC, eine beständige Größe z. B. $= h$; daher ist auch eine Integralgleichung für diesen Schnitt einerley mit der Gleichung für die krumme Fläche selbst, wenn man nur in dieser $y = h$ setzt. Man s. die Anmerkung zu §. 212. Umgekehrt, weil das letzte wahr ist; so ist auch die Richtigkeit der Differenzialgleichung $dz = Pdx$ für den Schnitt erwiesen.

(422. Seite, 7. Zeile.)

„Für FM hat man die Gleichung $dz =$ „Qdy."

In dieser ist also, wie gehörig, x der Abstand der Ebene PQM von A, eine unveränderliche Größe, z. B. $= f$; daher wäre auch eine Integralgleichung für diesen Schnitt einerley mit

mit der Gleichung für die krumme Fläche selbst, wenn man nur in dieser $x = f$ setzt. Man s. wieder die Anmerkung zu §. 212. Durch die Richtigkeit dieser Integralgleichung für einen solchen Schnitt, ist also auch die Differenzialgleichung $dz = Qdy$ für denselben Schnitt erwiesen.

Zu §. 220. 1. Zusatz.

Wäre die Axe auf die Grundfläche senkrecht, so brauchte $w = AM$ keine Function von z zu seyn, weil alsdenn Am mit AQ zusammenfällt. AQ verlängert schneide den Umfang zwischen m und F in p, und von p fälle man auf AF das Loth pF; für die vom Kreise unterschiedene krumme Linie $BLmI$ sey nun eine Gleichung zwischen den senkrechten Coordinaten $AF = t$ und $Fp = u$ gegeben: so ist I. $w^2 = t^2 + u^2$, wobey wegen jener gegebenen Gleichung, w eine Function von t allein bleibt. Ferner ist $x : y = t : u$, mithin $u = \frac{y}{x} t$, und $w^2 = \frac{y^2}{x^2} t^2 + t^2$, oder II. $t^2 = \frac{w^2 x^2}{x^2 + y^2}$. Setzt man diesen Werth von t in die Gleichung (I.), so findet man w als eine Function von x und y allein. Setzt man ferner diesen Werth von w anstatt a in der Gleichung 210. §., auch dort zugleich $\alpha = 90°$: so erhält man eine Gleichung für die Oberfläche eines graden Kegels von höherer Ordnung. Es sey z. B. $BLmI$ eine Ellipse, mithin der Kegel ein elliptischer grader, dessen halbe große Axe $AF = f$, die halbe kleine Axe $AI = g$: so ist nach dem 9. §., uu

$uu = gg - \frac{gg}{ff} \cdot tt$, folglich in (I.) $ww = tt + gg - \frac{gg}{ff} tt$, also vermittelst (II.), $w^2 = \frac{f^2 - g^2}{f^2} \cdot \frac{w^2 x^2}{x^2 + y^2} + g^2$, oder III. $w^2 = \frac{g^2 \cdot f^2 \cdot (x^2 + y^2)}{f^2 \cdot y^2 + g^2 \cdot x^2}$. Für $\alpha = 90^\circ$, ist die Gleichung für die Kegelfläche in dem 210. §., $\frac{aa\,(b - z)^2}{bb} = y^2 + x^2$; setzt man hierin anstatt aa den Werth von w^2 aus (III.), so erhält man die Gleichung $g^2 f^2 \,.\, (b - z)^2 = b^2 (f^2 y^2 + g^2 x^2)$ für die Fläche eines elliptischen graden Kegels; und nunmehr wäre es auch leicht, die Figur der Schnitte dieser Fläche mit einer Ebene, nach Anleitung des 213. §. zu untersuchen.

Zu §. 221. 1. Zusatz.

„Weil *AMN* eine Linie von doppelter „Krümmung ist, so muß man beyde Krüm= „mungen" ꝛc. ꝛc.

Wenn *AM* die Schraubenlinie ist, so ist die Reduction *BM* einerley mit der Tangente selbst (222. §. Zusatz), also die Krümmung der Schraubenlinie in Ansehung der gradlinichten Tangente an M, $= 0$. Entweder ist also die im Buche zuerst erwähnte Krümmung nichts wesentliches einer Linie von doppelter Krümmung; oder die Schraubenlinie muß keine Linie von doppelter Krümmung, mithin der Begriff im 218. §. von einer Linie von doppelter Krümmung unrichtig seyn, weil doch die Schraubenlinie offenbar nicht ganz in einerley Ebene

Ebene liegt. — Nimmt man an, daß nur die Schraubenlinie, sonst keine andere Linie von doppelter Krümmung, bey der im Buche zuerst erwähnten Krümmung eine Ausnahme macht: so ist diese Schwierigkeit gehoben.

Zu §. 224. 1. Zusatz.

„Für den Schnitt *LMH* hat man die Glei„chung $dz = Qdy$, und für *OMK* ist $dz =$ „Pdx.“

Man s. die Anmerkung zu §. 217. und zu §. 212.

Zu §. 224. 2. Zusatz.

„Also $yy + zz = rr$. Alsdenn ist r eine „Function von x und y, die in beyden Fällen „Aenderung leidet, man mag x allein, oder y „allein ändern.“

Daß r eine Function von x und y sey, erhellet daraus, weil z für sich eine Function von x und y ist. Daß sich aber r auch ändert, wenn sich y allein ändert, ist offenbar falsch; denn wie kann doch alsdann in einem und demselben Kreise *LMH* der Halbmesser veränderlich seyn? Dieser Irrthum wird in der That selbst durch des Herrn Verfassers folgende Rechnung (439. Seite, 1. Zeile) verbessert, wo er ganz richtig $d.r = 0$ annimmt.

Zu §. 225. Zusatz.

„So ist allemal $kka \sec \varphi \cos(\psi - \varphi)$ „$> hha$."

Woher dieses? In dem Vortrage des Lehrbuches liegt nicht die geringste Spur zu einer Ursache hievon. Man stelle sich über der Grundfläche $BCDE$ der graden Pyramide, zugleich ein rechtwinkliches Parallelepipedum, und die Seiten beyder Körper unter $BCDE$ gehörig erweitert vor: so wird offenbar in der Durchschnittsfigur $CIKL$ der Pyramide, zugleich die Durchschnittsfigur des Parallelepipedi, als ein Theil jener Fläche, enthalten seyn; denn die Seiten der Pyramide fahren unter $BCDE$ immer mehr auseinander. Es sey also $CIKL = kk$, $BCDE = hh$, und der erwähnte Schnitt des Parallelepipedi in der Ebene $CIKL$ sey $= \varkappa\varkappa$, so ist $kk > \varkappa\varkappa$. Aber nach dem Zusatz des 223. §. ist $\varkappa\varkappa = \frac{hh}{\cos\psi}$, also ist $kk > \frac{hh}{\cos\psi}$, folglich auch $kka \sec \varphi \cos(\psi - \varphi) > \frac{hh}{\cos\psi} a \sec \varphi \cos(\psi - \varphi)$. Es ist aber $\frac{hh}{\cos\psi} a \sec \varphi \cos(\psi - \varphi) = hha \cdot \frac{\cos(\psi - \varphi)}{\cos\psi \cos\varphi} = hha(1 + \tang \psi \tang \varphi)$ also $> hha$; um so mehr ist also noch $kka \sec \varphi \cos(\psi - \varphi) > hha$. Wenn man nun die Seiten der Grundfläche $BCDE$ verschwindend klein, also $\varphi = FAH = 0$ annimmt, so wird kk von $\varkappa\varkappa$ nicht unterschieden seyn, das heißt kk wird $= \frac{hh}{\cos\psi}$, oder $\frac{kk}{hh} = \frac{1}{\cos\psi}$ wer-

werden. Bisher habe ich angenommen, daß sich die Ebene $CIKL$ unter der Grundfläche $BCDE$ neiget; wäre aber die Ebene $CIKL$ über der Grundfläche $BCDE$ geneigt, so wäre zwar alsdann $kk < \varkappa\varkappa$, weil die Seiten der Pyramide von den Seiten des Parallelepipedi abwärts nach dem Puncte A zu fahren. Indeß wenn auch hier die Seiten der Grundfläche $BCDE$ verschwinden, so wird die Gränze des Werthes $\frac{kk}{\varkappa\varkappa} = 1$, oder $\frac{kk}{hh : \cos\psi} = 1$, das heißt wiederum $\frac{kk}{hh} = \frac{1}{\cos\psi}$ werden. Da übrigens aus diesem Vortrage in die Augen fällt, daß für ein verschwindendes $BCDE$, der Satz $\frac{kk}{hh} = \frac{1}{\cos\psi}$, ganz unabhängig von dem Seitensprunge $kka \sec\varphi \cos(\psi - \varphi) > hha$, bewiesen wird: so erhellet zugleich die Ueberflüßigkeit des Lehnsatzes selbst im 225. §.; zumal da der Herr Verfasser in der Folge nur den Zusatz, den Lehnsatz aber des 225. §. nirgends brauchen wird. Eine unmittelbare Anwendung aber eben dieses Lehnsatzes auf die Verbesserung eines Irrthums bey der allgemeinen Cubatur eines geometrischen Körpers, werde ich in der Anmerkung zu §. 228. No. 2. zeigen.

Zu §. 226.

(Zu Ende.)

„Und vermittelst einer zweyten Integration wird daraus S gefunden."

Eine

Eine gar zu drollige Kürze für ein Lehrbuch! Weil man voraussetzt, daß z und ψ schon vor der ersten Integration durch γ und δ ausgedruckt worden sey, so wird nach der ersten Integration, wo δ allein veränderlich war, dS eine Function von δ, γ und $d\gamma$ bleiben. Würde man nun dS aufs neue so integriren, daß man γ allein veränderlich annähme; so würde man dadurch gar nicht des Herrn Verfassers krummlinichtes Dreyeck S, sondern ein krummlinichtes Trapezium bekommen, welches zwischen den Ebenen ACR, RCM, ACZ und einer durch M mit ACR parallel laufenden Ebene enthalten wäre. Um also das krummlinichte Dreyeck S selbst zu bekommen, muß man nach der ersten Integration, γ, $d\gamma$ auch δ durch den veränderlichen Winkel ACM ausdrucken. Wenn nämlich der unveränderliche Winkel an AC, $= \alpha$, und $ACM = \lambda$ ist, so ist nach der sphärischen Trigonometrie $\tan \gamma = \cos \alpha . \tan \lambda$, $\sin \delta = \sin \alpha . \sin \lambda$, und dS wird nunmehr eine Function von λ und $d\lambda$ allein seyn, deren Integral so genommen werden muß, daß es mit $\lambda = 0$ verschwindet. Das ist also die im Buche erwähnte zweyte Integration!

Zu §. 228. No. 2.

In No. 2. ist selbst in der Methode der allgemeinen Cubatur eines geometrischen Körpers ein Hauptirrthum. Das zweyte Differenzial (dort dV eigentlich ddV) des Körpers ist nämlich eine schiefe Elementarpyramide, deren Grundfläche $MEmD$ der Herr Verfasser gehörig

hörig $= \frac{zz\,dy\,d\delta \cos\delta}{\cos\psi}$ setzt, deren Höhe er aber ganz falsch $= z$ annimmt. Hier folgt die von mir versprochene Anwendung des Lehnsatzes im 225. §. Diese schiefe Pyramide wird nach dem 226. §. No. 2., von der Kugelfläche in *M* senkrecht geschnitten; und nur dieser graden Pyramide, deren Grundfläche das kugelförmige Elementarrechteck *MFGH* ist, ihre Höhe ist $= z$. Es ist wirklich auffallend, daß der Herr Verfasser bey seiner genauen Unterscheidung der Grundflächen beyder Pyramiden, nicht auf den Unterschied der Höhen dieser Pyramiden, nicht einmal auf seinen Lehnsatz im 225. §. dachte, wo für verschwindende Seiten des Rechteckes, der Winkel $\varphi = 0$, also die Höhe der schiefen Pyramide $= z \cos\psi$ ist, weil das dortige *a* mit dem gegenwärtigen Kugelhalbmesser *z*, und das dortige ψ mit dem gegenwärtigen ψ vollkommen einerley bedeutet. Die Grundfläche *MFGH* ist $= zz\,dy\,d\delta \cos\delta$, also verhält sich die Grundfläche der gegenwärtigen graden Pyramide zur Grundfläche der schiefen Pyramide $= \cos\psi : 1$; und die Höhe der graden zur Höhe der schiefen Pyramide $= 1 : \cos\psi$, folglich verhalten sich die Höhen beyder Pyramiden umgekehrt wie ihre Grundflächen. Dieß letzte zeige ich fürs erste nur darum an, damit man nicht etwa meyne, der Herr Verfasser hätte die Höhe der schiefen Pyramide vielleicht absichtlich deßwegen $= z$ gesetzt, weil die Höhe nicht so sehr von dem Winkel ψ abhinge als die Grundfläche; dieß wäre offenbar falsch. Dann beweiset aber auch der vorige Satz in völliger Schärfe,

daß beyde Pyramiden gleichen körperlichen Inhalt haben, daß also der Inhalt der schiefen Pyramide $= \frac{1}{3} z \,.\, z^2 dy d\delta \cos\delta$, und nicht wie im Buche stehet, $= \frac{\frac{1}{3} z^3 \,.\, dy\, d\delta \cos\delta}{\cos\psi}$ sey. Eben dasselbe erhält man auch auf diese Art: die Grundfläche der schiefen Pyramide ist $= \frac{zz\, dy\, d\delta \cos\delta}{\cos\psi}$, ihre Höhe ist $= z \cos\psi$, also ist ihr körperlicher Inhalt $= \frac{1}{3} z \cos\psi \,.\, \frac{zz\, dy\, d\delta \cos\delta}{\cos\psi} = \frac{1}{3} z^3 dy d\delta \cos\delta$. So ist also auch alles folgende, was der Herr Verfasser von der Integration sagt, ganz falsch. Zwar was er von einer zweyten Integration erwähnt, muß auch den geübteren Leser überaus wenig befriedigen, selbst alsdann, wenn auch der Irrthum bey dem Winkel ψ nicht vorhanden wäre. Es ist nämlich $ddV = \frac{1}{3} z^3 dy d\delta \cos\delta$, und z eine Function von y und δ; bey der ersten Integration bleibt y unveränderlich, und es ist $dV = \frac{1}{3} dy \,.\, \int z^3 d\delta \cos\delta$. Wenn man ferner bey der zweyten Integration bloß y veränderlich annähme, also, wie im Buche, schlechtweg $V = \frac{1}{3} \int dy \,.\, \int z^3 d\delta \cos\delta$ setzte: so würde man nicht den von den Ebenen ACR, RCM, ACM und von der dazwischen enthaltenen krummen Fläche begränzten Körper V bekommen; sondern einen Körper, der von den Ebenen ACR, RCM, ACZ und von der Ebene MDC die bis an die Ebene ACZ erweitert wäre, eingeschlossen ist. Um also durch die zweyte Integration eben nur den Körper V zu erhalten, muß man ein ähnliches Verfahren wie in der Anmerk. zu §. 226., wählen. Man

muß

muß nämlich in $dV = \frac{1}{3} d\gamma . \int z^3 d\delta \cos \delta$, sowohl γ, $d\gamma$, als auch δ durch den veränderlichen Winkel ACM ausdrucken. Wenn nämlich der unveränderliche Winkel an AC, $= \alpha$, der veränderliche $ACM = \lambda$ ist; so ist $\tang \gamma = \cos \alpha \tang \lambda$, $\sin \delta = \sin \alpha . \sin \lambda$, und dV wird nunmehr eine Function von λ und $d\lambda$ allein seyn, deren Integral so genommen werden muß, daß es mit $\lambda = 0$ verschwindet. Das ist also die im Buche erwähnte zweyte Integration!

Zu §. 228. Zusatz.

„Setzt man ζ und ϑ beyde (jeden) $= \frac{1}{2}\pi$, „so findet man $V = \frac{1}{6} z^3$ (sollte heißen $\frac{1}{6} \pi z^3$), „als den achten Theil der Kugel.“

Warum muß das, was man aus dieser Voraussetzung durch Integration $= \frac{1}{6} \pi z^3$ findet, grade der achte Theil der Kugel seyn? Die Antwort, daß nach der gemeinen Geometrie $\frac{1}{6} \pi z^3$ der achte Theil von $\frac{4}{3} \pi z^3$ ist, wäre handgreiflich eine petitio principii. Des Herrn Verfassers Gedanke war also folgendes: Setzt man alle sphärische Winkel ζ, ϑ und ARM jeden $= 90°$, so zeiget leicht die Lehre von Kugelschnitten, daß auch jede Seite (Bogen) des sphärischen Dreyeckes ein Quadrant, also M der Pol des Quadranten AR seyn muß; der Winkel ϑ an M ist aber, der Voraussetzung gemäß, der vierte Theil von allen Winkeln um diesen Pol, und am entgegengesetzten Pole findet dasselbe statt; also ist dieses Dreyeck eben so der achte Theil der ganzen Kugelfläche, als die dazu gehörige Pyramide deren Spitze im

Mittelpunct der Kugel liegt, der achte Theil des ganzen Kugelinhalts ist.

Zu §. 232. 2. Zusatz.

„Die Auflösung ist übrigens so allgemein, „daß sie auch auf den Fall angewandt wer„den kann, wenn b negativ, und $a \pm b\sqrt{-1}$ „eine unmögliche Größe ist. Alsdenn muß „auch q negativ seyn, und die allgemeine „Form der gesuchten Cubikwurzel ist nun „$p \pm q\sqrt{-1}$."

Soll dieß wirklich statt finden, so muß zugleich nothwendig alles folgende in diesem Zusatze falsch seyn. Denn um in diesem Falle p und q zu finden, muß man $c = \sqrt[3]{(aa + bb)}$, und nicht wie im Buche $= \sqrt[3]{(aa + b)}$ setzen. Die erste Gleichung für p im 232. §. bleibt sonst ungeändert, nur daß $c = \sqrt[3]{(aa + bb)}$ ist; die zweyte verwandelt sich in $-q^3 . \sqrt{-1} + \frac{3}{4}cq\sqrt{-1} = \frac{1}{4}b\sqrt{-1}$, oder in $-q^3 + \frac{3}{4}cq = \frac{1}{4}b$, aber nicht wie im Buche, in die Gleichung $-q\sqrt{q} + \frac{3}{4}c\sqrt{q} = \frac{1}{4}\sqrt{b}$; daher kann auch r nicht wie im Buche $= \sqrt{q}$, sondern es muß $= q$ seyn. Umgekehrt, soll alles folgende in diesem Zusatze wahr seyn, so muß man (457. Seite, letzte Zeile) $a \pm b^{\frac{1}{2}} . \sqrt{-1}$ anstatt $a \pm b\sqrt{-1}$, und (458. Seite, 3. Zeile) $p \pm q^{\frac{1}{2}} . \sqrt{-1}$ anstatt $p \pm q\sqrt{-1}$ setzen.

Zu

Zu §. 240. 1. Auflösung.

„Ferner setze man $(x^2 - p)^2 - (qx + r)^2$ „$= 0$, so ist das eine biquadratische Gleichung, „wovon man alle vier Wurzeln angeben kann. „Es ist nämlich $x^2 - p = \pm (qx + r)$, also „$x^2 - qx - (p + r) = 0$, oder $x^2 + qx$ „$+ r - p = 0$, und jede von den beyden letz„ten Gleichungen giebt zwey Wurzeln."

Hier giebt der Herr Verfasser einen schon für sich falschen Satz als Ursache eines andern wahren Satzes an. Es ist nämlich die zweyte quadratische Gleichung $x^2 + qx + r - p = 0$ wahr, wie man bald sehen wird; sie hat aber durchaus nicht daher ihre Richtigkeit, daß aus der Gleichung $(x^2 - p)^2 - (qx + r)^2 = 0$, diese $x^2 - p = \pm (qx + r)$ folgt, welche falsch ist; denn aus jener biquadratischen Gleichung folgt eigentlich $\pm (x^2 - p) = \pm (qx + r)$, welches nur eine quadratische Gleichung giebt, man mag die obern oder untern Zeichen wählen. Wenn man aber die angenommene biquadratische Gleichung $(x^2 - p)^2 - (qx + r)^2 = 0$ so ordnet $x^4 - (2p + q^2) x^2 - 2qrx + p^2 - r^2 = 0$, und sie durch die gefundene erste quadratische Gleichung $x^2 - qx - (p + r) = 0$ dividirt: so erhält man zum vollständigen Quotienten $x^2 + qx + r - p = 0$, also eine zweyte quadratische Gleichung, die zu der ersten Auflösung im Buche eben so wesentlich gehört, als sie nunmehr auf einem festen Grunde ruhet.

Zu §. 241. No. 4.

(478. Seite).

„Oft kann aber auch ein Factor vom „Coefficienten des ersten Gliedes = n gesetzt „werden, wenn der andere Factor im Coeffi„cienten des zweyten Gliedes aufgehet.“

Sehr schwankend! Denn wenn der zweyte Factor von dem ersten unterschieden ist, so kann das Oft des Herrn Verfassers nur in dem einzigen Falle statt finden, wenn eben der andere Factor nicht bloß in dem Coefficienten des zweyten Gliedes, sondern auch zugleich in den Coefficienten aller folgenden Glieder der Gleichung aufgehet. Uebrigens findet man durch Division die dritte Wurzel der cubischen Gleichung, $x = + 5$, dem Gesetze im 236. §. vollkommen gemäß.

Zu §. 246.

„Also ist die Zahl ihrer unmöglichen Wur„zeln nicht größer als $m - n + 1$. Aber $m - n$ „ist allemal eine grade Zahl; und wenn k die „Zahl der unmöglichen Wurzeln der Differen„zialgleichung ist, so ist auch k eine grade Zahl. „Weil nun k nicht größer als $m - n + 1$ „seyn kann, so folgt, daß auch k nicht größer „als $m - n$ sey, oder $m - n$ nicht kleiner „als k.“

Zu diesen etwas sonderbaren Schlüssen ist der Herr Verfasser bloß durch den Fehler $m - n + 1$ anstatt $m - n$ verleitet worden.

Diese ganze Stelle muß nämlich so verbessert werden:

Also ist die Zahl ihrer unmöglichen Wurzeln nicht größer als $m - 1 - (n - 1)$ oder nicht größer als $m - n$. Weil nun $m - n$ eine grade Zahl ist (23. §. 3. Zus.), so kann die Differentialgleichung nicht mehr Paare unmöglicher Wurzeln haben als die Hauptgleichung, wohl aber weniger; das heißt, die Hauptgleichung muß wenigstens eben so viele Paare unmöglicher Wurzeln haben, als ihre nächste Differenzialgleichung.

Zu §. 250. Zusatz.

„Wenn man die Exponentialgrößen nach „dem 59. §. durch Reihen ausdrückt."

Eigentlich nach dem 1. Zusatz des 59. §., wenn man dort b für die Basis e des natürlichen Systems und $y = \varphi \sqrt{-1}$ annimmt.

Zu §. 252. No. 1.

„Wenn f in der Gleichung $x^3 - fx + g = 0$, „das entgegengesetzte Zeichen hätte, so wäre r un„möglich, und das Verfahren ließe sich nicht an„wenden. Aber in eben dem Fall wären auch „nicht alle drey Wurzeln der gegebenen Gleichung „möglich (237. §. Zus.), wogegen die Wurzeln „der Gleichung für den Sinus des Submultipli „des gegebenen Sinus s oder $\frac{s}{r}$, allemal möglich „sind."

Es ist nicht gnug, daß f nicht das entgegengesetzte Zeichen hat; eine zweyte eben so merkwürdige Bedingung, welche den Gebrauch der trigonometrischen Tafeln bey Auflösung der cubischen Gleichung $x^3 - fx + g = 0$ einschränkt, ist diese, daß $\frac{3g}{f}$ nicht $> \sqrt{\frac{4}{3}f}$, oder $\frac{27}{4}g^2$ nicht $> f^3$ seyn darf. Denn in der Gleichung (251. §. 3. Zus.) $x^3 - \frac{3}{4}r^2x + \frac{1}{4}r^2s = 0$, ist s der Sinus für den Halbmesser $= r$, folglich $\frac{s}{r}$ ein Sinus für den Halbmesser $= 1$; also kann $\frac{s}{r}$ nie > 1 werden, das heißt $\frac{3g}{2f} \cdot \sqrt{\frac{3}{f}}$ darf nicht > 1, oder $\frac{27}{4}g^2$ nicht $> f^3$ seyn. Ueberhaupt aber darf man die Wurzeln einer höhern Gleichung auf diese Art vermittelst der trigonometrischen Tafeln in keinem andern Falle suchen, als wenn diese höhere Gleichung keine unmögliche Wurzeln hat.

Zu §. 252. No. 2.

Diese vortrefliche Auflösung verdient noch ein Exempel. Es sey I. $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$; man setze zuerst nach dem 238. §., $x = y - 1$, so ist II. $y^3 - 12y + 16 = 0$; diese Gleichung mit der im 252. §. No. 1. verglichen, giebt $f = 12$, und $g = 16$, also $r = \sqrt{\frac{4}{3} \cdot 12} = 4$, und $s = \frac{3 \cdot 16}{12} = 4$; mithin $\frac{s}{r} = 1$, dieser Sinus für den Halbmesser $= 1$ gehört zu $90° = \alpha$; also

also ist $\frac{1}{3}\alpha = 30^\circ$, wovon der Sinus $= \frac{1}{2}$; ferner $\frac{1}{3}(\alpha + 360^\circ) = 150^\circ$, davon der Sinus auch $= \frac{1}{2}$; und $\frac{1}{3}(\alpha + 2 . 360^\circ) = 270^\circ$, davon der Sinus $= -1$. Für den Halbmesser $r = 4$, ist der erste Sinus $= 2$, der zweyte $= 2$, der dritte $= -4$; folglich $y = 2$, $y = 2$, $y = -4$, die drey Wurzeln der Gleichung (II.); also auch $x = +1$, $x = +1$, und $x = -5$, die drey Wurzeln der Gleichung (I.), vollkommen wie in dem Exempel des 247. §. gefunden worden.

Zu §. 254 und Zusätzen.

Von der Absicht und dem Nutzen dieser ganzen Aufgabe sagt der Herr Verfasser kein Wort. Um sie einigermaßen wo nicht dem neunten Abschnitte selbst, wenigstens doch dem Lehrbuche einzuverleiben, bemerke man, daß sich das $\int \frac{dx}{\alpha + \beta x + \gamma xx + \ldots}$, oder wenn X eine rationale Function von x ist, das $\int \frac{X dx}{\alpha + \beta x^n + \gamma x^{2n} + \ldots}$ leicht finden läßt, wenn man einmal die quadratischen Factoren des Nenners gefunden hat; denn das $\int \frac{dx}{pp - 2pqx \cos\varphi + qqxx}$ ist bereits aus dem 82. §. 1. Zusatz bekannt.

Zu §. 269. 1. Zusatz.

Aus der allgemeinen Gleichung $Sx^n = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + \frac{n}{2} . Sx^{n-1} - \frac{n(n-1)}{2.3} . Sx^{n-2}$

$+\frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot3\cdot4}\,.\,Sx^{n-3}-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot3\cdot4\cdot5}\,.$ $Sx^{n-4}+\ldots\ldots$ (hiernach muß die im Buche verbessert werden), wird der Artillerist sehr leicht eine Vorschrift zur Berechnung derjenigen Kugelpyramiden, deren Basis ein Quadrat $= x^2$ ist, herleiten. Nämlich für $n = 0$, ist $Sx^0 = x$; für $n = 1$, ist $Sx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}Sx^0 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$; für $n = 2$, wird also $Sx^2 = \frac{1}{3}x^3 + Sx - \frac{1}{3}Sx^0 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x = \frac{x(1+x)(1+2x)}{2\cdot3}$, und dieses ist die Summe der Reihe $1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 \ldots\ldots + x^2$, folglich die Summe aller Kugeln in jener Pyramide.

Ein Kugelhauffen, welcher zur Basis ein Rechteck hat, dessen Breite $= x$ und dessen Länge $= l = x + y$ ist, besteht aus der eben erwähnten Pyramide und aus einem schiefen Prisma, das von zwey gleichseitigen und parallelen Dreyecken, von zwey länglichen Rauten und von einem Rechtecke begränzt ist. Jede dieser Rauten hat mit dem Rechtecke gleichen Inhalt, nämlich $= x\,.\,y$, und der Inhalt des gleichseitigen Dreyeckes ist $= 1 + 2 + 3 \ldots + x = \frac{1}{2}x(1+x)$, also der Inhalt des Prisma $= \frac{1}{2}yx(1+x) = \frac{1}{2}(l-x)(1+x)x$; folglich ist die Kugelanzahl in demjenigen Hauffen dessen Basis ein Rechteck ist, $= \frac{x(1+x)(1+2x)}{2\cdot3} + \frac{1}{2}x(l-x)(1+x) = \frac{x(1+x)(3l+1-x)}{2\cdot3}$. Es sey z. B. die Breite der untersten Lage = 10 Kugeln und derselben

selben Länge = 20 Kugeln, oder $x = 10$ und $l = 20$; so ist die Kugelanzahl $= \frac{10.11.(60+1-10)}{2.3}$ $= \frac{5.11.51}{3} = 5.11.17 = 935$.

Zu §. 269. 3. Zusatz.

Die zweyte Summe $= \frac{1}{6}x(1+x)(2+x)$, als die Summe der Triangularzahlen (258. §. und 260. §. 1. Zus.), giebt dem Artillerist die Kugelanzahl in einer Pyramide deren Basis ein gleichseitiges Dreyeck ist, die Seite dieses Dreyeckes nämlich $= x$ angenommen. Wäre z. B. $x = 10$, so wäre die Kugelanzahl $= \frac{10.11.12}{2.3} = 5.11.4$ $= 220$.

Zu §. 271.

(Zu Ende der 566. Seite.)

Die von dem Herrn Verfasser hier aufgezählten Wurzeln sind alle möglich; man könnte aber wohl fragen, ob und warum die Gleichung $\varphi^{2n} - A\varphi^{2n-2} + B\varphi^{2n-4} - C.\varphi^{2n-6} \ldots\ldots$ $\pm 2.3.4\ldots.2n(2n+1) = 0$ nicht auch unmögliche Wurzeln haben könnte? Da ein Beweis hievon schon zum Theil nach dem 248. §. möglich, dabey aber doch weitläuftig wäre: so kann man diese Schwierigkeit ganz leicht auf die Art heben, daß man grade die Prämisse des Einwurfs zum Schlußsatze macht, nämlich: wenn die aufgezählten Wurzeln an der Zahl $2n$, wahre Wurzeln der obigen

obigen Gleichung von der $2n$ Ordnung, sind; so ist kein anderer Werth mehr für φ möglich (23. §.), das heißt die Gleichung hat keine unmöglichen Wurzeln: allein jede der angeführten Wurzeln macht ja sin φ mithin auch die Gleichung $= 0$.

Zu §. 272.

„Die Gleichung hat also $2n$ Wurzeln, „und alle Wurzelgleichungen in einander mul„tiplicirt geben das Product ꝛc. ꝛc."

Man s. die Anmerkung zu §. 271.

Zu §. 275. 2. Zusatz.

Die Abwechslung der Zeichen in den letzten fünf Reihen folget aus dem 5. Zusatz des 23. §.; denn weil die Hauptreihe $1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots$ lauter positive Glieder und mögliche einfache Factoren haben soll, so sind alle Wurzeln der Reihe negativ (236. §.)

Zu §. 277. 4. Zusatz.

„Nach diesen Formeln kann man zuerst „$\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ suchen, und daraus ferner „die Coefficienten $A, B, C \ldots$ finden."

Wenn man bedenkt, daß der Herr Verfasser bloß deßwegen $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{4}{3} \cdot \frac{\alpha^2}{2}, \gamma = \frac{6}{3} \cdot \alpha\beta$ u. s. w. setzen kann, weil er $A = \frac{1}{12}, B = \frac{1}{5} A^2$, u. s. w. aus dem 3. Zusatz als bekannt annimmt: so muß es wirklich auffallen, wenn er im Ernst an-

anräth, zuerst $\alpha = \frac{1}{2}, \ldots\ldots \zeta = \frac{12}{3}\alpha$,
$+ \frac{12.11.10}{3.4.5}\beta\delta + \frac{12.11.10.9.8}{3.4.5.6.7}.\frac{\gamma^2}{2}$, u. s. w.
zu berechnen, um daraus $A = \frac{\alpha}{1.2.3}, \ldots\ldots,$
$F = \frac{\zeta}{1.2.3\ldots13}$ zu suchen.

Nothwendig muß also dieser ganze Zusatz ausgestrichen werden; zumal da die Coefficienten der Gleichung $\frac{1}{2}\varphi.\cot\varphi = 1 - A\varphi^2 - B\varphi^4 - C\varphi^6 \ldots$ nicht erst aus dem 3. Zusatze, sondern weit vollkommener schon aus dem 2. Zusatze bekannt sind. Es ist nämlich aus dem 276. §. $a = \frac{1}{2.3}\pi^2$, $b = \frac{2^2}{2.3.4.5}.\frac{1}{3}\pi^4$, u. s. w.; vermittelst der Gleichungen (2. Zus.) $a = 2A\pi^2$, $b = 2^3B\pi^4$, u. s. w. findet man also $A = \frac{1}{12}$, $B = \frac{1}{720}$, u. s. w. Auch führt der Herr Verfasser am Ende des 6. Zusatzes die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ aus diesem 4. Zusatze ohne den geringsten Nutzen an.

Uebrigens ist auch der folgende 5. Zusatz ganz überflüßig. Wozu die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$? man muß doch ihre Bedeutung nur aus dem 276. §. muthmaßen. Ueberhaupt verdunkelt dieser 5. Zusatz was im 1. und 2. Zusatz des 276. §. schon in vollem Lichte da stehet.

Index
zu Herrn Karstens mathematischen Analysis und höhern Geometrie.

A.

Aehnlichkeit der krummen Linien, 178. §. und 188. §. 3. Zus.
Amplitude, 104. §.
Applicate, 5. §.
Asymtoten, 14. §. und 164 — 171. §.
Axe, Zwergaxe, zugeordnete Axe, 8, 14 und 125. §. Hauptaxe eines Körpers, 71. §.

B.

Basis oder Grundzahl eines logarithmischen Systems, 54. §. sie aus dem Modulus zu finden, 59. §. 3. Zus.
Binomischer Lehrsatz, für ganze Exponenten, 28. §. für gebrochene und verneinte Exponenten, 41. §. für ganze Exponenten aus andern Gründen hergeleitet, 262. §. 2. Zus.
Bogen, derjenige Kreisbogen der seinem Halbmesser gleich ist, 187. §. 1. Zus. unzählig viele Kreisbogen für jede trigonometrische Linie, 182. §. die Länge eines Kreisbogens aus

aus einer dazu gehörigen trigonometrischen Linie zu finden, und umgekehrt 66. §. und 2. Zus. 264. §. Anmerk. 271 — 272. §. allgemeine Formuln für den Sinus, Cosinus und die Tangente eines vielfachen Bogens, 251, 253. §. 270. §. 1 — 5. Zus. 278. §.

C.

Cissoide, 156. §.
Combination, s. Verbindung.
Coefficienten einer Gleichung, derselben Verhältnisse zu den Wurzeln der Gleichung, 23. §. 5. Zus. 236, 248. §. 273 — 275. §.
Conchoide, 158. §.
Conoid, 71. §. Inhalt und Oberfläche des parabolischen und hyperbolischen, 151. §.
Conjugationswinkel, 125. §. kleinster für gleich große zusammengeordnete Durchmesser der Ellipse, 133. §.
Coordinaten, 5. §.
Cubatur eines runden Körpers, 72. §. allgemeine Cubatur eines geometrischen Körpers, 228. §.
Cycloide, gemeine, 189. §. verkürzte, verlängerte, 191. §.
Cylinder, Gleichung für die schiefe Cylinderfläche, 210. §. Zus. Figur des Schnittes eines schiefen Cylinders mit einer Ebene, 213. §. 1. Zus. 214. §. 1. und 3. Zus. grader oder schiefer Cylinder und Cylinderfläche von höherer Ordnung, ihre Axe, 220. §.

D.

Delphische Problem, 157. §. 2 — 3. Zus. 158. §. 2. Zus.

Differenzial, 31. §. zweytes, 37. §. einer Fläche, eines Sectors, 67 — 69. §. einer Function zweyer veränderlichen Größen (60. §.) vollständig auszudrucken, 113. §.

Differenzialgleichung zwischen Bogen, Abscisse und Ordinate, 48 — 49. §. zwischen einem Kreisbogen und den zugehörigen trigonometrischen Linien, 50 — 51. §. 63. §. zwischen Bogen und zusammenlaufenden Ordinaten, auch für die Lage der Tangente, 52. §. erste, zweyte rc. Differenzialgleichung, und Differenziallinien, 243. §. Differenzio-Differenzialgleichung, 178. Seite.

Durchmesser eines Kegelschnittes, Hauptdurchmesser, 125. §. überhaupt, 170. §. krummlinichter, 172. §. Hauptdurchmesser und Gegendurchmesser, 172. §.

E.

Ebene, Gleichung für eine schneidende, 209. §. 2. Zus.

Elastische Linie, 208. §.

Ellipse, 8 — 11. §. u. s. w.

Epicycloide, 195. §.

Evolute, 110. §. der Apollonianischen Parabel, 150. §. 168. §. 3. Zus. der logarithmischen Spirallinie, 188. §. die durch Evolution einer krummen Linie erzeugte krumme, 112. §.

die

die durch Evolution der logarithmischen Spirallinie erzeugte krumme, 188. §. 1. Zusatz. Evolute der gemeinen Cycloide, 194. §. wenn eine Evolute der durch die Abwickelung erzeugten Linie ähnlich ist, und zugleich eine umgekehrte, oder mit ihr übereinstimmige Lage hat (194. §. 4. Zus.); allgemeine Gleichungen für diese beyden Fälle, 201 — 202. §. die durch Evolution der gemeinen Epicycloide erzeugte krumme Linie, 200. §.
Exponentialgröße, 58. §.
Exponentiallinie, 179. §. 2. Zus.

F.

Factor, quadratischer, 23. §. 4. Zus. die quadratischen einer rationalen ganzen Function zu finden, 254. §.
Figurirte Zahlen, 258 — 259. §.
Fläche, Gleichung für eine krumme, 209. §. die Figur des Schnittes einer jeden krummen Fläche mit einer Ebene, zu finden, 212. §. die Lage der eine krumme Fläche berührenden Ebene, 217. §.
Function, 1. §. ganze, gebrochene, rationale, irrationale, 3. §. verschiedene Ordnungen, 3. und 18. §. algebraische, transcendente, 45. §. homogene, 163. §. 1. Zusatz. den Werth einer gebrochenen zu finden, wenn ihr Zähler und Nenner für $x = a$ verschwindet, 265 — 266. §.

G.

Gleichung, Ordnungen, 18. §. Gleichungen zwischen radius vector und Perpendikeln auf die Tangenten, 53. §. 2 — 3. Zus. zwischen Abscissen auf einem Kreisbogen, und Ordinaten, die in des Bogens Mittelpuncte zusammenlauffen, 53. §. 4. Zus. aus einer höhern das zweyte Glied wegzuschaffen, 238. §. wenn eine von der ersten Ordnung für eine krumme Linie gehört? 185. §. — Man s. Wurzel.

Glied, das allgemeine einer Reihe, 255. §. das allgemeine einer summatorischen Reihe, 256. §. das summatorische der figurirten Zahlenreihen zu finden, 260. §. allgemein das summatorische Glied einer Reihe zu finden, 269. §. das allgemeine Glied einer Reihe mit Hülfe der Differenzreihen zu finden, 281. §. das allgemeine Glied einer zurückkehrenden Reihe zu finden, wenn der Bruch bekannt ist, woraus die Reihe ihren Ursprung nimmt, 284. §.

H.

Harriot's Lehrsatz, 236. §. Anmerk.

Hauptaxe, man s. Axe.

Hauptdurchmesser, man s. Durchmesser.

Hauptlinie, 243. §.

Hexagonalzahlen, 259. §.

Hyperbel, Apollonianische, 14 — 16. §. gleichseitige,

seitige, 14. §. 4. Zus. von höherer Ordnung, 165. §.
Hypocycloide, 195. §.

J.

Index des Gliedes einer Reihe, 255. §. Index der summatorischen Reihe, 257. §.
Infinitinomium, 263. §.
Integral, 61. §.
Interpoliren, 280. §.

K.

Kegel, Gleichung für die Fläche eines graden, 209. §. 5. Zus. Gleichung für die Fläche des schiefen, 210. §. Kegel und Kegelfläche von höherer Ordnung, 220. §. und 1. Zus. die Figur des Schnittes eines graden Kegels mit einer Ebene (17 §. und 155. §. 3. Zus.), und eines schiefen Kegels zu finden, 213. §.
Kettenlinie, 206. §.
Knoten, 116. §.
Körper, runder, 71. §. Inhalt und Oberfläche, 72. §. man s. Cubatur und Quadratur.
Krümmung, 104. §. 3. Zus. und 106. §. Krümmungskreis, Krümmungshalbmesser, Mittelpunct der Krümmung, 106. §. Gleichung für die Linie der Krümmungsmittelpuncte, 109. §. Linie von doppelter Krümmung, 218. §. Tangente (219. §.) und Rectification einer Linie von doppelter Krümmung, 222. §.

L.

Logarithmen, 54 — 59. §. und 282 — 283. §. der trigonometrischen Linien, 279. §. log nat π und log Brigg π, 600. Seite.

Logarithmische Linie, 179. §. Huygenische, 204. §.

M.

Maxima und Minima, 44. §. besondere Art derselben, 119. §. 1. Zus.

Mittelpunct einer krummen Linie, 173. §. 2c. 2c.

Modulus eines logarithmischen Systems, 57. §. 2. Zus. ihn aus der Grundzahl, und umgekehrt, zu finden, 59. §. 3. Zus.

N.

Normallinie, 47. §. und 48. §. Zus. bey zusammenlauffenden Ordinaten, 53. §. unveränderliche, 120. §. 3. Zus. Normallinie für jeden Punct einer jeden krummen Fläche, 117. §. 1. Zus.

O.

Oberfläche eines runden Körpers, 72. §. man s. Körper und Quadratur.

Ordinaten, 5. §. zusammenlauffende, 6. §. dem Durchmesser zugeordnete, 125. §.

P.

Parabel, Apollonianische, 12 — 13. §. von höherer Ordnung, 168. §. Neilische, 168. §. 3. Zus. parabolische Linien, 176. §.

Pentagonalzahlen, 259. §.

Polygonalzahlen, 259. §.

Prisma, senkrechter und schiefer Schnitt eines dreyseitigen, 223. §.

Projection, 211. §.

Proportionallinien, zwey mittlere durch Zeichnung zu finden, 157. §. 2 — 3. Zus.

Punct, einer Linie zugeordneter, 115. §. zweyfacher, vielfacher, 116. §. Wendungspunct und Rückkehrpunct, 118. §.

Pyramide, senkrechter und schiefer Schnitt, wenn die Fläche des senkrechten verschwindend klein ist, 225. §. Zus.

Pyramidalzahlen, dreyseitige, 258. §. vierseitige, fünfseitige, u. s. w. 259. §.

Q.

Quadratur, 70. §. der Hyperbel, 143. §. 5. Zus. der Parabel, 145. §. der Ellipse, 146. §. anderer krummen Linien, man. s. ihren Namen. Quadratur der Oberfläche eines runden Körpers, 72. §. der Oberfläche eines jeden geometrischen Körpers, wenn für sie eine Gleichung zwischen drey rechtwinklichen Coordinaten (224. §.), oder zwischen zwey Winkeln und der Entfernung z gegeben sind, 226. §. Quadratur eines sphärischen Dreyecks, 227. §.

Quadratrix des Dinostrates, 180. §. Tschirnhausens quadrirende Linie, 181. §.

R.

Radlinie, man s. Cycloide.
Rectification, 70. §. einer Linie von doppelter Krümmung, 222. §.
Reihe, Differenzreihe, 256. §. summatorische, 256. §. Formel für jede Potenz einer Reihe, 263. §. Umkehrung der Reihen, 264. §. zurückkehrende Reihe, 267. §. die Summe der Reihe $1 + 2^n + 3^n \ldots\ldots + x^n$, 269. §. 1. Zus. die Summe der Reihe $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} \ldots\ldots + \frac{1}{x^n}$, wenn n eine grade Zahl ist, 276. §.
Relationsscale (Moivre's), 268. §
Rückkehrpunct, 118. §.

S.

Scheitelpuncte eines Durchmessers, 125. §.
Schraubenlinie, 218. §. 3. Zus. Subtangente, 219. §. Zus.
Sector, dessen Differenzial überhaupt, 69. §. Quadratur eines elliptischen, 146. §. Zusatz. Quadratur der hyperbolischen, 143. §. 1. Zus. rc. rc.
Sehnen, zugeordnete, 125. §.
Sinuslinie, 182. §. Zus.
Sphäroid, Inhalt und Oberfläche, 151. §.

Spiral-

Spirallinie, archimedische, 183. §. hyperbolische, 184. §. parabolische, 185. §. logarithmische, 187. §.
Spitze, 116. §.
Subnormallinie, 47. §. anders, 53. §. unveränderliche, 120. §. 2. Zus.
Subtangente, 47. §. bey zusammenlauffenden Ordinaten, 53. §. unveränderliche, 184. §. 4. Zus. Subtangente einer Linie von doppelter Krümmung, 219. §.

T.

Tangente einer Linie von einfacher Krümmung, 46. §. 47. §. 1. Zus. 49. §. bey zusammenlauffenden Ordinaten, 48. §. 52. §. 53. §. Zus. überhaupt zu finden, 113. §. 1 — 3. Zusatz. unveränderliche, 203. §. die mit dem radius vector einen unveränderlichen Winkel macht, 187. §. 2. und 7. Zus. Tangente einer Linie von doppelter Krümmung, 219. §.
Tangentenlinie, 182. §. Zus.
Tetragonalzahlen, 259. §.
Triangularzahlen, 258. §.
Tschirnhausens quadrirende Linie, 181. §.

U.

Umkehrung der Reihen, 264. §.

V.

Verbindung, derselben Exponent, 261. §. die Zahl aller möglichen Verbindungen nach y zu finden, 262. §.

W.

Wendungspunct, 118. §.

Wurzeln einer cubischen Gleichung, 239. §. einer biquadratischen Gleichung, 240. §. die möglichen rationalen einer höhern Gleichung zu finden, 241. §. die irrationalen einer Gleichung durch Näherung zu finden, 242. §. die gleichgroßen Wurzeln einer Gleichung zu finden, 247. §. die unmöglichen Wurzeln einer Gleichung aus den Coefficienten zu beurtheilen, 248. §. die Wurzeln einer höhern Gleichung vermittelst der trigonometrischen Tafeln zu finden, 252. §.

Z.

Zeichen, Successionen entgegengesetzter und übereinstimmiger Zeichen in Gleichungen, 234. §. 1 — 2. Zus. 236. §.

Ver-

Verbesserungen

derjenigen Druck- und Schreibfehler in Herrn Karstens mathematischen Analysis und höhern Geometrie, die weder in seinem Verzeichnisse, noch in den gegenwärtigen Erläuterungen vorkommen.

---

26. Seite, 5. Zeile von unten, anstatt $+ \vartheta xy^2$ lese man $+ \vartheta x^2 y$

44. S. 5. Z. anstatt $d.\sqrt[3]{x} = \frac{dx}{3\sqrt[3]{x}}$,

lese man $d.\sqrt[3]{x} = \frac{dx}{3\sqrt[3]{xx}}$

85. S. 5. Z. anst. $- xdx$, lese man $- 2xdx$

— 6. Z. anst. $+ 3x^3dx$ lese man $+ 4x^3dx$

87. S. 10. Z. anst. $= \frac{dx}{x\sqrt{(1-xx)}}$.

lese man $= \frac{-dx}{x\sqrt{(1-xx)}}$.

95. S. 8. Z. anst. $= \frac{dz}{nb}$, lese man $= \frac{dZ}{nb}$,

96. S. 13. Z. anst. $\frac{dy}{A} =$ lese man $\frac{y}{A} =$

98. S. 2. Z. anst. $aax^{-\frac{3}{2}}(a-x)^{-\frac{1}{2}}$
lese man $aax^{-\frac{5}{2}}(a-x)^{-\frac{1}{2}}.dx$

— 11. Z. anst. $\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{(a-x)}}$ lese man $\frac{x^{\frac{5}{2}}.dx}{\sqrt{(a-x)}}$

99. S. 4. Z. anstatt u^{rs}, so wird $x^{\frac{r}{s}} = u^{r}$,
lese man u^{vs}, so wird $x^{\frac{r}{s}} = u^{vr}$,

104. S. 15. Z. anst. jedes Integral,
lese man dieses Integral

107. S. 14. Z. anst. $\int ydx + xdy =$
lese man $\int(ydx + xdy) =$

110. S. 2. Z. von unten, anst. $= \frac{a}{\sqrt{c}}.\int\frac{dz}{1-zz} =$
lese man $= \frac{a}{\sqrt{c}}.\int\frac{dz}{\sqrt{(1-zz)}} =$

112. S. 11 — 12. Z. anst. $= lz + \sqrt{(zz-1)}$,
lese man $l(z + \sqrt{(zz-1)})$,

114. S. 8. Z. anst. 5) $\frac{ax}{\sqrt{b}}$. lese man 5) $\frac{a}{\sqrt{b}}$.

118. S. 11. Z. anst. $= \frac{A}{c}.A \tan\frac{z}{c}$
lese man $= \frac{A}{c}.Arc \tan\frac{z}{c}$

119. S. 4. Z. anst. in jenem Zähler
lese man in jener Summe der Zähler

121. S. 12. Z. anst. $-\frac{C}{p-qx} =$
lese man $-\frac{C}{p-qx}$, und $P =$

122. S. letzte Z. anst. $= \frac{Bdx}{2bb} +$ lese man $= \frac{BdX}{2bb} +$

123. S. 1. Z. anst. ferner $\frac{BdX}{2bbX^n} +$
lese man ferner $dy = \frac{BdX}{2bbX^n} +$
127. und 128. S. man s. Erläuterungen.
131. S. 3. Z. anst. $= \cos \zeta$ lese man $= - \cos \zeta$
141. S. 4. Z. anst. $\int x^2 dx$. lese man $- \int x^2 dx$.
— 5. Z. anst. $+ \frac{1}{2} rr \int dx \sqrt{(rr - xx)}^{-\frac{1}{2}}$
lese man $- \frac{1}{2} rr \int dx \, (rr - xx)^{-\frac{1}{2}}$
143. S. 7. Z. anst. $- \frac{1-m+np+n}{(1-m)b} \int x^{n-m} (ax^n + b)^p$.
lese man $- \frac{(1-m+np+n)a}{(1-m)b} \int x^{n-m} dx (ax^n + b)^p$.
— 11. Z. anst. $- \frac{2-m}{1-m}$. lese man $+ \frac{2-m}{1-m}$.
144. S. 5. Z. von unten, anst. $- \frac{2-m}{1-m}$.
lese man $+ \frac{2-m}{1-m}$.
145. S. 8, 9 und 10. Zeile ist alles richtig, nämlich die Verbesserungen des Herrn Verfassers sind falsch; ausgenommen 8. Zeile, anst. $- \frac{\sqrt{(1-xx)}}{2x} +$ lese man $- \frac{\sqrt{(1-xx)}}{2xx} +$
147. S. 6. Z. (nicht 5. Z.) von unten, anst. $\int x^{m-1}. dx$.
lese man $\int x^{m-n}. dx$.
148. S. 4. Z. von unten, im Nenner, anst. $(m+1)a$
lese man $(m+1)b$
149. S. 10 — 11. Z. von unten, anst. man soll, den Werth des Integrals so genommen, daß es für $x = 0$ verschwindet, lese man man soll den Werth des Integrals, so genommen daß es für $x = 0$ verschwindet,

153. S.

153. S. 7. Z. anst. $\frac{b^9}{c^5} + \ldots$ lese man $\frac{b^9}{c^5} + \ldots$)

157. S. 10. Z. (nicht 9. Z.), im Nenner, anst. lx^{n-1} lese man $(lx)^{n-1}$

— 2. Z. von unten, anst. $m + 1)^2 x^m$ lese man $(m + 1)^2 x^{m+1}$

159. S. 1. Z. anst. $\frac{(lz^2)}{1.2}$ lese man $\frac{(lz)^2}{1.2}$

— 9. Z. anst. 95. §. lese man 94. §. 2. Zus.

— 3. Z. von unten, anst. $-\frac{1}{(la)^3}$. lese man $+\frac{1}{(la)^3}$.

160. S. 17. Z. anst. $-\frac{n}{la}$ lese man $-\frac{n}{(la)^2}$

162. S. 4. Z. anst. $\int \frac{dx}{(1-xx)^3}$. $Arc \sin x$ lese man $\int \frac{dx}{(1-xx)^{\frac{3}{2}}}$. $Arc \sin x$

163. S. 2. Z. anst. + ... , lese man . $\sqrt{(1-xx)}$ + ... ,

165. S. 6. Z. von unten, anst. $+\frac{m}{m+n}$ lese man $+\frac{n-1}{m-n}$

— 3. Z. von unten, anst. ganz aus der Formel, lese man ganz aus dem letzten Theile der Formel.

166. S. 3. Z. von unten, anst. $\frac{d \sin \phi}{1 - \sin \phi} =$ lese man $\frac{d \sin \phi}{1 - \sin \phi^2} =$

167. S. 7. Z. anst. 100. §. lese man 99. §.

169. S.

169. S. letzte Z. anst. $\int d\frac{1}{p}.\cos Arc.$
lese man $\int d\frac{1}{p}.\cos Arc.X$

170. S. 1. Z. anst. $X = \int qd, \sin Arc.X$
lese man $= \int qd.\sin Arc.X$

— 6. Z. von unten, anst $\int \sin Arc.X.d\frac{1}{p} =$
lese man $\sin Arc.X.d\frac{1}{p} =$

173. S. 4. Z. anst.. $\frac{1}{2}\,l\frac{bb - aa + (b - a)x}{bb - aa - (b - a)x}$
lese man . $l\frac{\sqrt{(bb - aa)} + (b - a)x}{\sqrt{(bb - aa)} - (b - a)x}$

188. S. 4. Z. im Zähler, anst. $+ zddy -$
lese man $+ zdzddy -$

— 7. Z. im Zähler, anst. $+ zddy -$
lese man $+ zdzddy -$

— 9. Z. im Nenner, anst. $+ zddy -$
lese man $+ zdzddy -$

— 11. Z. im Zähler, anst. ds lese man ds^2

189. S. 8. Z. anst. $= p^2ds^2)$, lese man $= p^2ds^2$,

193. S. letzte Zeile, anst. ABM lese man ABm
anst. LND lese man $L\bar{N}D$
(Dabey muß in der 15. fig. dasjenige N, welches bey Z stehet, mit einem Querstrich bezeichnet werden.)

196. S. 5. Z. anst. $+\pi'' dy^3 dx$ lese man $+\pi'' dy dx^3$

— 11. Z. anst. 39. §. lese man 40. §. 2. Zus.

— 5. Z. von unten, anst. $\varrho = \frac{yd^3p}{2.3.dy}$,
lese man $\varrho = \frac{yd^3p}{2.3.dy^3}$,

196. S. 4. Z. von unten, anst. $\pi'' = \frac{y\,de}{dy}$,
lese man $\pi'' = \frac{y\,dr}{dy}$,

197. S. 11. Z. anst. $-\frac{p}{P}$ lese man $-\frac{P}{p}$

— 13. Z. anst. $P = 0$ ist, sie fällt aber, wenn $p = 0$ ist, lese man $p = 0$ ist, sie fällt aber, wenn $P = 0$ ist,

— 2. Z. von unten, anst. M lese man N

198. S. 7. Z. von unten, anst dx^2y, lese man dx^2dy,

204. S. 12. Z. anst. mu, lese man mv,

— 15. Z. anst. es lese man er

205. S. 10. Z. von unten, anst. pME lese man pmE

209. S. 6. Z. von unten, anst. $= ax$, lese man $= adx$

212. S. 14. Z. anst. $FM - PF = \frac{1}{2}p$
lese man $FM + PF = \frac{1}{2}p$

216. S. 9. Z. anst. 97. §. lese man 123. §.

218. S. 12. Z. anst. (15. §. 3. Zus.) l. m. (15. §. 4. Zus.)

219. S. 8. Z. anst. 2 und 3. Zus. lese man 4 und 5. Zus.

225. S. 9. Z. anst. $\pm V\,(\frac{1}{4}ff -$ lese man $\pm V\,((\frac{1}{4}ff -$

226. S. letzte Z. anst. 9 und lese man 10 und

228. S. 11. Z. anst. (120. §. 1. Zus.) $\frac{b}{2a}$,
lese man (120. §. No. 2.) $= \frac{b}{2a}$,

229. S. 10. Z. anst. $-\frac{p}{a}xx$. Rückt nun C
lese man $-\frac{p}{2a}xx$. Rückt nun der Mittelpunct C

— 8. Z. von unten, anst. der andern lese man derselben

233. S. 6, 8 und 9. Z. anst. $MH.MN$ l. m. $MH.HN$
240. S. 5. Z. von unten, anst. 8. Zus. l. m. 9 und 10. Zus.
243. S. 1. Z. anst. $= AC : AP =$ l. m. $= AC : CP =$
246. S. 10. Z. anst. QR lese man QS
250. S. letzte Z. anst. $\frac{adu\,(\sqrt{((1 - m^2u^2) - 1)}}{\sqrt{(1 - uu)}}$,
lese man $\frac{adu\,(\sqrt{(1 - m^2u^2)} - 1)}{\sqrt{(1 - uu)}}$,
252. S. man s. Erläuter.
253. S. 11. Z. anst. $m = 1$; lese man $m = \frac{1}{2}$;
257. S. 5. Z. anst. (110 §.) lese man (109 § No. 1.)
259. S. 8. Z. von unten, anst. $w =$ lese man $W =$
260. S. 3. Z. von unten, anst. 23 Zus.
lese man 2 und 3. Zus.
262. S. 8. Z. anst. $dx\,\sqrt{}\,n(bb - xx) + n^2xx =$
lese man $dx\,\sqrt{}\,(n(bb - xx) + n^2xx) =$
263. S. man s. Erläuter.
264. S. 6. Z. anst. $= dx\,\sqrt{}\,n.\sqrt{}\,(n+1)\,xx - aa)$,
lese man $= dx\,\sqrt{}\,n.\ \sqrt{}\,((n + 1)\,xx - aa)$,
— 6. Z. von unt. anst. $-cc.\,l\frac{x + \sqrt{(xx - cc)}}{c} + C$,
lese man $-cc.\,l\left(\frac{x + \sqrt{(xx - cc)}}{c}\right) + C$
— 4. Z. von unten, anst. $= cc.\,l\frac{a + \sqrt{(aa - cc)}}{c}$
lese man $= \frac{\pi b}{c}.\,ccl\frac{a + \sqrt{(aa - cc)}}{c}$
— letzte Zeile, anst. $-cc.\,l.\,\frac{x + \sqrt{(xx - cc)}}{a + \sqrt{(aa - cc)}}$.
lese man $-\pi bc.\,l.\,\frac{x + \sqrt{(xx - cc)}}{a + \sqrt{(aa - cc)}}$.
265. S. 2. Z. von unten, anst. $\delta x +$ lese man $\delta x^2 +$
267 und 268. Seite, man s. Erläuter.

274. S.

274. S. 16. Z. anst. $= \frac{BF^2}{BP}$, lese man $= \frac{PF^2}{BP}$

279. S. 7. Z. anst. unmöglich; lese man möglich;

280. S. 14. Z. anst. Cissoide lese man Conchoide

— 4. Z. von unten, anst. $\frac{dt}{du} =$ lese man $\frac{dt}{du} = -$

281. S. 6. Z. von unten, anst. $- b^2) dt^2) du^2$: lese man $- b^2 + t^2) du^2$:

— 4. Z. von unten, anst. $+ 6u^2 +$ l. m. $+ (6u^2 +$

282. S. 8. Z. anst. $= \frac{2u + 3a}{t} + \frac{a^2 - b^2}{ut}$

lese man $= - \frac{2u + 3a}{t} - \frac{a^2 - b^2}{ut}$.

— 9. Z. anst. $- \frac{ab^2}{u^2 t} + \frac{t}{u}$, lese man $+ \frac{ab^2}{u^2 t} - \frac{t}{u}$,

— 7. Z. von unt. anst. $= \frac{a^2 - b^2}{ab}$ l. m. $= - \frac{a^2 - b^2}{ab}$

— 6. Z. von unten, anst. $+ \frac{t - b}{u}$ l. m. $= - \frac{t - b}{u}$

283. S. 7, 10, 12 und 13. Z. anst. $\frac{dt}{du} =$ l. m. $\frac{dt}{du} = -$

— 8. Z. lese man $+ \frac{ab^2}{u(a + u)\sqrt{(b^2 - u^2)}}$

$- \frac{(a + u)\sqrt{(b^2 - u^2)}}{uu}$.

284. S. 11. Z. von unten, anst. dz^2 lese man $2dz^2$

286. S. 12. Z. anst. $+ \beta x + x))$, lese man $+ \beta x + \alpha))$,

— 4. Z. von unten, anst. 5. Zus. lese man 4. Zus.

291. S. 9. Z. anst. $+ \frac{(\gamma u^3 + \zeta u^2 + \vartheta u + \lambda)}{tt}$

lese man $+ \frac{\gamma u^3 + \zeta u^2 + \vartheta u + \lambda}{tt}$

— 11. Z. l. m. $\zeta t + \frac{\beta u^2 + \epsilon u + \eta}{\alpha} + \frac{\gamma u^3 + \zeta u^2 + \vartheta u + \lambda}{\alpha t}$

295. S. 10. Z. anst. $\frac{A}{g} t =$ lese man $\frac{A}{g^2} t =$

— letzte Z. anst. $\frac{Ng}{M} =$ lese man $\frac{N}{M} =$

296. S. letzte Z. anst. $\frac{\delta}{u}$ lese man $\frac{\delta u}{u}$

302. S. 12. Z. von unten, anst. $+ \zeta x t \vartheta) y +$ lese man $+ \zeta x + \vartheta) y +$

— 8. Z. von unten, anst. $= - \beta x + \varepsilon$, lese man $= - (\beta x + \varepsilon)$,

303. S. 6. Z. anst. *EMNn* lese man *EnNM*

304. S. 12. Z. anst. $+ \delta x + \varepsilon)$ lese man $+ \delta x + \varepsilon) u$

307. S. 13. Z. anst. *MCQ* lese man *NCQ*

308. S. 3. Z. anst. *CP*, *CQ*, lese man *PM*, *QN*

309. S. 12. Z. anst. $+ \delta qq +$ lese man $+ qq +$

— 14. Z. anst. $p = \frac{be - 2e}{4f - ee}$ lese man $p = \frac{be - 2c}{4f - ee}$

312. S. 6. Z. anst. o nähert, lese man *a* nähert,

315. S. 12. Z. anst. die Entfernung der Axe vom Pol, lese man die Sagitte,

316. S. 1. Z. anst. α lese man β

— 2. Z. anst. β lese man α

— 3. Z. anst. $\frac{b}{b} . \alpha$ lese man $\frac{b}{a} . \alpha$

319. S. 7. Z. von unt. anst. 2,30258 . . . (57. §. 4 Zus.), lese man 2,71828 . . . (54. §.),

321. S. 8. Z. anst. 82. §. lese man 83. §.

324. S. 12. Z. anst. *CMT*=0, lese man *CMT*=90°

326. S. 3. Z. von unten, anst. $- \pi + \alpha$, l. m. $\pi + \alpha$,

334. S. 5. Z. von unten, anst. $+ \frac{1}{2(n + 2(\pi + \alpha}\Big)$. lese man $+ \frac{1}{2(n + 2)\pi + \alpha}\Big)$.

342. S. 5. Z. anst. 2. Zusatz. lese man 3. Zusatz.

343. S. 6. Z. von unten, anst. $-\frac{5^4}{6^4}=$ l. m. $-3.\frac{5^4}{6^4}=$
— 4. Z. von unten, anst. $= 0,01585$
lese man $= 0,01583$
— 3. Z. von unten, anst. $+ 2,15375$
lese man $+ 2,15373$
— 2. Z. von unten, anst. $-0,00001$.
lese man $- 0,00003$.
345. S. 17 Z. anst. $= \sqrt{PM.CM} =$
lese man $= \sqrt{AO.CM} =$
347. S. 5. Z. von unten, anst. $= \frac{z\,dy}{dz}$ lese man $= \frac{z\,dr}{dz}$
349. S. 7. Z. anst. $Ht =$ lese man $Ct =$
351. S. 9. Z. von unten, anst. AMS lese man AMm
356. S. 7. Z. anst. $= CQ =$ lese man $= CO =$
357. S. 7. Z. anst. dieser lese man jener
— 12. Z. anst. $b = r$, lese man $b = a$,
359. S. 12. Z. von unten, anst. $-2ax$ l. m. $+2ax$
— 5. Z. von unten, anst. 5. Zus. lese man 6. Zus.
360. S. 6. Z. von unten, anst. $= A \operatorname{sinv} \frac{x}{b}$,

lese man $= a.A.\operatorname{sinv}\frac{x}{b}$,

361. S. 10. Z. von unten, im Zähler, anstatt
$(dx\,\sqrt{(a+b)^2 - 2ax})$
lese man $dx\,\sqrt{((a+b)^2 - 2ax)}$
362. S. 8. Z. anst. $-\frac{A}{ma}\int Z^p dX =$ l. m. $-\frac{A}{ma}\int Z^p dW$
363. S. 6. Z. anst. $\frac{1}{2}\pi a$ lese man $\frac{1}{3}\pi a$
— 7. Z. anst. $\frac{3}{4}a.\sqrt{\frac{3}{4}a} =$ l. m. $\frac{3}{4}a.\sqrt{\frac{3}{4}aa} =$
370 S. 7. Z. anst. $= Z$, lese man $= z$,
377. S. 6. Z. anst. (99. §. 11. Zusatz) l. m. (98. §. 2. Zusatz)
384. S. 5. Z. v. unt. anst. $l\left(\frac{\sqrt{(xx+yy)}}{a} = n\,Arctg.\frac{x}{y}\right)$

lese

lese man $l\frac{\sqrt{(xx+yy)}}{a} = n\,Arc\,tg.\frac{x}{y}$

385. S. 2. Z. von unt. anst. 101. §. l. m. 101. §. 1. Zusatz.

395. S. 12. Z. anst. $\frac{adu}{\sqrt{(2au-uu)}}$, lese man $\frac{adu}{\sqrt{(2au+uu)}}$

397. S. 8. Z. anst. $a^4 - (b^2 + y^2)^2\,dx^2 =$
lese man $(a^4 - (b^2 + y^2)^2)\,dx^2 =$

398. S. man s. Erläuter.

400. S. letzte Z. anst. AP lese man QP

401. S. 12. Z. von unten, anst. die große Axe
lese man die halbe große Axe
— 11. Z. von unten, anst. diese Axe
lese man diese halbe Axe

406. S. 19. Z. anst. $-2\cos\eta\cos\vartheta\cot\alpha\sin\vartheta^2$
lese man $-2\cos\eta\cos\vartheta\cot\alpha\sin\vartheta$
— 22. Z. anst. $tt - 2tu\sin\eta\cot\alpha\sin\vartheta \left\{\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right.$
lese man $tt - 2tu\sin\eta\cot\alpha\sin\vartheta + \left\{\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right.$

410. S. 2. Z. anst. $2(ma-mf).u$ l. m. $2(na-mf).u$

411. S. 11. Z. anst. $= \frac{(ma-uf)}{\sqrt{(mm-nn)}}$ l. m. $= \frac{ma-nf}{\sqrt{(mm-nn)}}$

413. S. letzte Z. anst. $\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha^2-\sin\alpha^2}$ l. m. $\frac{\sin\alpha^2+\cos\alpha^2}{\cos\alpha^2-\sin\alpha^2}$

414. S. 14. Z. von unt. anst. 1. Zusatz l. m. 2. Zusatz
— 12. Z. von unten, anst. des Kegels WY
lese man des Kegels, WY

418. S. 3. Z. anst. 203. §. lese man 213. §. 2. Zusatz.

419. S. letzte Z. anst. $+\frac{2(rr-Eg)L}{E^2-rr} =$
lese man $+\frac{2(rr-Eg)L}{E^2-rr}.x =$

420. S. 2. Z. im Zähler, anst. $\pm \surd (Eg - rr)^2$
lese man $\pm \surd ((Eg - rr)^2$
im Nenner, anst. B^2 lese man E^2
423. S. 1. Z. anst. $ST \surd (QS^2 + QT^2)$
lese man $ST = \surd (QS^2 + QT^2)$
436. S. 3. Z. anst. (217. §. Zus.) l. m. (217. §. 1. Zus.)
437. S. 7. Z. von unten, anst. (217. §. n. 2.)
lese man (217. §. n. 3.)
448. S. man s. Erläuter.
451. S. 2. Z. von unten, anst. Gleichungen
lese man Gleichung
452. S. 2, 5, 7 u. 12. Z. anst. $+2aq+$ l. m. $+aq+$
455. S. 12. Z. anst. 229. §. lese man 230. §.
457. S. 14. Z. anst. $= \frac{p \pm q\surd -1}{\surd f}$, lese man $= \frac{p \pm \surd q}{\surd f}$.
459. S. 4. Z. anst. 231. §. lese man 232. §.
465. S. 6. Z. anst. $+ (n-1)f + g)y^{n-2}$
lese man $+ (n-1)fp + g)y^{n-2}$
— 10. Z. lese man $x = y - \frac{1}{2}f$, $x = y - \frac{1}{3}f$,
$x = y - \frac{1}{4}f$, u. s. f.
— 16. Z. anst. eine cu- lese man eine
467. S. 8. Z. von unten, anst. $-\frac{3}{4}(a-b)$;
lese man $-\frac{3}{4}(a-b)^2$;
468. S. 15 Z. von unten, anst. $\surd (\frac{1}{4}gg - \frac{1}{27}f^3)$
lese man $\surd (\frac{1}{27}f^3 - \frac{1}{4}gg)$
— 14. Z. von unten, anst. $>$ lese man $<$
— 10. Z. von unten, anst. $<$ lese man $>$
469. S. 2. Z. von unten, anst. $(x^2 - p)^2 =$
lese man $(x^2 - p)^2 -$
(man s. aber die Erläuter.)
476. S. 3. Z. anst. $+ 1\frac{1}{7}$, lese man $+ 1\frac{6}{7}$,
— 4. Z. anst. $p^3 - p^2 - 57p + 105$
lese man lieber $p^3 - 8p^2 - 13p + 140$

477. S. 5. Z. von unten, anst. y lese man n
481. S. 6. Z. anst. — mp lese man — mn
483. S. 12. Z. von unt. anst. — 0,005259496875
lese man — 0,005259796875
— 8. Z. von unten, anst. + 0,009675201026
lese man + 0,009675001024
484. S. 9. Z. anst. + 0,009675201026
lese man + 0,009675001024
485. S. 9. Z. von unten, anst. + 0,009675201026
lese man + 0,009675001024
— 7. Z. von unten, anst. — 149, 34862678,
lese man — 149, 34862672,
— 6. Z. von unten, anst. — 0,006689047109
lese man — 0,0066957428532
— 5. Z. von unt. anst. + 0,0000639 18002
lese man + 0,00006478131896
486. S. 5. Z. anst. 0, 00004675 ....
lese man 0, 00004680 ....
— 9. Z. anst. 5, 492463918 ....
lese man 5, 492464781 ....
487. S. 9. Z. anst. Wurzel, negativ seyn.
lese man Wurzel, welche wegen des 236. §. negativ ist, kleiner als 1 seyn.
496. S. 2. Z. von unten, anst. r — 1 lese man r
497. S. 6. Z. von unten, anst. + ... = 0.
lese man $+ \ldots \pm \frac{n(n-1)}{2} . K = 0.$
— 3. Z. von unten, anst. r — 2 lese man r
507. S. 8. Z. anst. $\ldots \frac{n}{3} \alpha + \frac{n}{3} p \ldots$
lese man $\ldots \frac{1}{3} \alpha + \frac{n}{3} p \ldots$
— 4. Z. v. unt. anst. $(\frac{1}{3} \alpha + 2p)$ l. m. $\frac{1}{3}(\alpha + 2p)$.
— 3. Z. von unt. anst. $\frac{1}{3}(\alpha + P)$, l. m. $\frac{1}{3}(\alpha + p)$,

507. S. 2. Z. von unten, anstatt $\frac{1}{3}(\alpha + 2P)$ lese man $\frac{1}{3}(\alpha + 2p)$

509. S. 1. Z. anst. $\sqrt{\frac{3}{4}f}$, lese man $\sqrt{\frac{4}{3}f}$

510. S. 17. Z. anst. $- B \cos z^{n-1} \sin^3 +$ lese man $- B \cos z^{n-1} \sin z^3 +$

511. S. 10. Z. anst. $-2pq \cos\varphi$ l. m. $-2pqx \cos\varphi$

512. S. 2. Z. anst. $+ \gamma r$. lese man $+ \gamma r^2$.

519. S. 11. Z. von unt. anst. 28 34 43 53 64 76
lese man 28 36 45 55 66 78

— 10. Z. v. unt. anst. 84 118 161 214 278 354
lese man 84 120 165 220 286 364

— 2. Z. von unten, anst. 28 34 43 53 64
lese man 28 36 45 55 66

— letzte Zeile, anst. 84 118 161 214
lese man 84 120 165 220

521. S. die 10, 13 u. 15. Z. muß nach des Hrn. Verfassers Anzeige verbessert werden; alsdann aber

— 16. Z. anst. $5 = \frac{1}{y} px$ lese man $s = \frac{1}{y} px$

— 17. Z. anst. $- \frac{1}{y} 5$. Daraus folgt $5 \cdot y = px - 5$ lese man $- \frac{1}{y} s$. Daraus folgt $s \cdot y = px - s$

— 18. Z. anst. $5 = \frac{px}{y+1}$. lese man $s = \frac{px}{y+1}$.

534. S. 2. Z. von unten, anst. $\overset{n+r+1}{L}$. lese man $\overset{n-r+1}{L}$.

539. S. 13. Z. von unten, anst. $= -\frac{2bA.B - cA^3}{a}$, lese man $= -\frac{2bA.B + cA^3}{a}$,

546. S. 7. Z. von unt. anst. $-\frac{1}{4}z^4 +$ l. m. $-\frac{1}{4}z^3 +$

— 5. Z. v. unt. im Nenner, anst. +.... l. m. +....)

549. S.

549. S. 1. Z. anst. $+ \alpha P$; lese man $+ \delta P$;
556. S. 17. Z. anst. 266. §. lese man 268. §.
557. S. 11. Z. anst. Sx^{n-4} lese man Sx^{n-1}
— 12. Z. anst. Sx^{n-5} lese man Sx^{n-4}
560. S. 11. Z. anst. Im 1. lese man Im 2.
— 14. Z. anst. $(a + bx)$ lese man $(2a + bx)$
563. S. 2. Z. anst. $-\cos\gamma)$ lese man $-\cos\gamma$
564. S. 13, 22 u. 28. Z. anst. 3 Zusatz l. m. 4. Zusatz
568. S. 12. Z. anst. $= x\left(1 + \frac{xx}{\pi}\right) =$

lese man $= x\left(1 + \frac{xx}{\pi}\right)$.

571. S. 10. Z. anst. $(2u - 1)$ lese man $(2n - 1)$
574. S. 17. Z. anst. (270. §.) lese man (273. §.)
575. S. 4. Z. von unt. anst. $= D = 0$ l. m. $- D = 0$
578. S. 9 Z. anst. $+ \big(\overset{n-1}{S} - \overset{n-2}{S}.a$ l. m. $+ \big(\overset{n-1}{s} - \overset{n-2}{S}.a$
— 9. Z. von unten, anst. 271 und 272. §.
lese man 273 und 274 §.
579. S. 3. Z. anst. $(1 + x)\ldots.$ l. m. $(1 + ax)\ldots.$
— 12. Z. anst. $+ sE$, lese man $+ 5E$,
582. S. 5. Z. anst. 269. §. lese man 271. §.
583. S. 6. Z. von unt. anst. $+ \text{tgng}\,\frac{m\pi}{2n}$ l. m. $+ \text{tang}\,\frac{m\pi}{2n}$
584. S. 3. Z. anst. $\frac{-\pi^2}{2.4.n} = B$, l. m. $\frac{-\pi^2}{2.4.n^2} = B$,
— 6. Z. anst. (273. §. lese man (275. §.
— 10. Z. anst. $= \frac{\pi}{2n} tg \frac{m\pi}{2m} =$ l. m. $= \frac{\pi}{2n} tg \frac{m\pi}{2n} =$
588. S. 7. Z. anst. 274. §. 1. lese man 276. §. 1.
— 11. Z. anst. $= \Big(\frac{2n}{n} -$ lese man $= \Big(\frac{2n}{m} -$
589. S. 3. Z. anst. μ lese man μ^2
— 4. Z. anst. μ^2 lese man μ^4

589. S.

589. S. 5. Z. anst. μ^4 lese man μ^6
— 6. Z. anst. μ^6 lese man μ^8
590. S. 4. Z. anst. (266. §) lese man (267. §.)
591. S. 12. Z. anst. $= \frac{1}{11} (2AD + B.C)$
lese man $= \frac{1}{11} (2AD + 2B.C)$
592. S. 8. Z. anst. 274. §. lese man 276. §.
594. S. 19. Z. von unten, anst. 267. §. l. m. 268. §.
— 4. Z. von unten, anst. (266. §. 1. Zusatz)
lese man (268. §. 1. Zusatz)
597. S. 3. Z. von unten, anst. der Allg. Rech.
lese man der Geom.
598. S. 2. Z. anst. Allg. Rech. lese man Geom.
— 11. Z. anst. $= \frac{m}{n} . \frac{1}{2} \varphi$, lese man $= \frac{m}{n} . \frac{1}{2} \pi$,
599. S. 3. Z. anst. 277. §. 5. Zus. l. m. 276. §. 2. Zus.
601. S. 6. Z. anst. $-\frac{m^2}{64m^2}-$ lese man $-\frac{m^2}{64n^2}-$
— 2. Z. von unten, anst. 275. §. 5. Zusatz.
lese man 276. §. 2. Zusatz.
606. S. 13. Z. anst. so ist $y^N =$
lese man; so ist (40. §.) $y^N =$
609. S. 2. Z. anst. $+ (x - 1)(x - 2) . 3$
$= 3x^2 - x + 3$.
lese man $+ (x - 1)(x - 2) . \frac{3}{2} = \frac{1}{2} x (3x + 7)$.
In der 38. Figur muß man in der verlängerten AQ, zwischen F und C den Buchstaben G setzen.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Rohde, Johann Philipp von, / Karsten, Wenceslaus Johann Gustav, / Rottmann, Heinrich August,

Erläuterungen über Herrn Karstens mathematische Analysis und höhere Geometrie (Greifswald, 1786.)

Berlin 1789

Math.p. 476
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082681-6
VD18 13575325